MATERIALE - SUPORT

L. SAVU
G. CONSTANTINESCU, V. LUPȘOR, N. SANDA, D. MARINESCU,
D. MATEI, C. ȚION, M. MOȚĂȚEANU, N. ANGELESCU, C. POȘTARU,
A. POVARNĂ, G. VLAD, N. GRUIA, O. UNGUREANU, GH. TIRLA,
C. HEUBERGER, J. GRIGORAŞ, GH. STOIANOVICI, V. TUDORAN

GHID DE PREGĂTIRE PENTRU EXAMENUL DE

BACALAUREAT LA MATEMATICĂ 2005

- Metodologia de organizare a examenului de bacalaureat
- Programele școlare pentru clasele IX-XII și pentru examenul național de bacalaureat
- Breviar teoretic
- Modele de teste pentru examenul de bacalaureat cu rezolvări complete

SIGMA

Scanned with OKEN Scanner

L. SAVU
G. CONSTANTINESCU, V. LUPȘOR, N. SANDA, D. MARINESCU,
D. MATEI, C. ȚION, M. MOȚĂȚEANU, N. ANGELESCU, C. POȘTARU,
A. POVARNĂ, G. VLAD, N. GRUIA, O. UNGUREANU, GH. TIRLA,
C. HEUBERGER, J. GRIGORAȘ, GH. STOIANOVICI, V. TUDORAN

GHID DE PREGĂTIRE PENTRU EXAMENUL DE

BACALAUREAT LA MATEMATICĂ 2005

- Metodologia de organizare a examenului de bacalaureat
- Programele școlare pentru clasele IX-XII și pentru examenul național de bacalaureat
- Breviar teoretic
- Modele de teste pentru examenul de bacalaureat cu rezolvări complete

SIGMA

Scanned with OKEN Scanner

Referenți științifici: prof. univ. dr. Constantin Niță
prof. gr.I Cristian Alexandrescu
prof. gr.I Manuela Prajea
prof. gr.I Vasile Paterău

Redactor: Corina Florentina Cîrtoaje
Design copertă: Andrei Cîrtoaje
Tehnoredactare: Andrei Cîrtoaje

© 2005 – Editura SIGMA

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA. Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

ISBN 973-649-111-0

Editura SIGMA
Sediul central: Str. General Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel./fax: 313.96.42; 315.39.43; 315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro

Distribuție: Tel./fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52;
021-243.40.35; 021-243.40.36
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
web: www.editurasigma.ro; www.anticar.ro
e-mail: distributie@editurasigma.ro;
sigmadistrib@yahoo.com;
anticariat@anticar.ro

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Pregătirea elevilor la matematică, atât la clasă, cât și în vederea susținerii unor examene și concursuri, trebuie să se realizeze ritmic și să se bazeze pe metode moderne de testare.

Proba scrisă din cadrul examenului național de bacalaureat 2005 constă în rezolvarea unui test alcătuit din 4 subiecte. Subiectul 1 are 30 de puncte și conține itemi de algebră și de analiză matematică. Subiectul al doilea are 20 de puncte și conține probleme de geometrie. Subiectul al treilea are 20 de puncte și conține probleme de algebră. Subiectul al patrulea are 20 de puncte și abordează probleme de analiză matematică.

La fiecare dintre cerințele subiectelor 1 și 2 elevul este solicitat să dea răspunsul scurt, fără justificarea demersului făcut. Subiectele 3 și 4 conțin probleme de tip întrebări structurate. La fiecare dintre acestea elevul va trebui să redacteze rezolvarea completă și să justifice pe foaia de examen rezultatele obținute.

Structura probei scrise pentru programa M3 diferă de cea prezentată mai sus prin următoarele: la subiectul 1 vor fi întrebări de algebră și geometrie, subiectul 2 conține probleme de algebră, subiectul 3 conține probleme de geometrie și subiectul 4 conține probleme de algebră.

Deoarece structurile probelor prezentate mai sus prezintă unele diferențe față de anul trecut - spre beneficiul candidaților - Serviciul Național de Evaluare și Examinare a solicitat cadrelor didactice propuneri privind conținutul subiectelor și a constituit un grup de profesori de matematică – recunoscuți pentru competența lor profesională – pe care i-a coordonat în vederea realizării unor modele de teste relevante. O parte a activității grupului este prezentată în această carte.

Testele sunt realizate pentru toate tipurile de programe de matematică (M1, M2 și M3) și, spre deosebire de alte culegeri, sunt însoțite de rezolvări complete. Acest fapt îl consider esențial deoarece la clasă elevul trebuie sfătuit și încurajat să rezolve exercițiul sau problema indiferent de forma în care acestea sunt prezentate.

Cartea este utilă nu numai pentru pregătirea bacalaureatului. Ea se constituie și într-un ghid metodic pentru profesori privind evaluările curente la clasă. Din acest punct de vedere, pe lângă programele școlare și programele de bacalaureat, cartea conține și un breviar teoretic.

Profesor univ. dr. Adrian Stoica

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 1 la Ordinul M.E.C. 4595 / 31.08.2004 privind aprobarea Calendarului și a Metodologiei de organizare și desfășurare a examenului de bacalaureat 2005

CALENDARUL

Examenului de Bacalaureat 2005

• *sesiunea iunie - iulie 2005*

2-13 mai 2005	- înscrierea candidaților
17 iunie 2005	- încheierea cursurilor pentru clasa a XII-a
27-28 iunie 2005	- limba și literatura română - probă orală
29-30 iunie 2005	- limba și literatura modernă - probă orală
1-2 iulie 2005	- limba și literatura maternă - probă orală
4 iulie 2005	- limba și literatura română - probă scrisă
5 iulie 2005	- limba și literatura maternă - probă scrisă
6 iulie 2005	- proba obligatorie a profilului - probă scrisă
7 iulie 2005	- o probă la alegere din aria curriculară corespunzătoare
specializării	- probă scrisă sau practică
8 iulie 2005	- o probă la alegere dintre disciplinele din celelalte
arii curriculare	- probă scrisă sau practică
11 iulie 2005	- afișarea rezultatelor (până la ora 16) și depunerea contestațiilor (orele 16 - 20)
12-13 iulie 2005	- rezolvarea contestațiilor
14 iulie 2005	- afișarea rezultatelor finale

• *sesiunea septembrie 2005*

18 - 22 iulie 2005	- înscrierea candidaților
22-23 august 2005	- limba și literatura română - probă orală
24-25 august 2005	- limba și literatura modernă - probă orală
26-27 august 2005	- limba și literatura maternă - probă orală
29 august 2005	- limba și literatura română - probă scrisă
30 august 2005	- limba și literatura maternă - probă scrisă
31 august 2005	- proba obligatorie a profilului - probă scrisă
1 septembrie 2005	- o probă la alegere din aria curriculară corespunzătoare specializării - probă scrisă sau practică
2 septembrie 2005	- o probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare
	- probă scrisă sau practică
5 septembrie 2005	- afișarea rezultatelor (până la orele 16) și depunerea contestațiilor (orele 16 – 20)
6-7 septembrie 2005	- rezolvarea contestațiilor
8 septembrie 2005	- afișarea rezultatelor finale

Scanned with OKEN Scanner

Anexa nr.2 *la Ordinul M.E.C. nr. 4595 din 31.08. 2004, privind aprobarea Calendarului şi a Metodologiei de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat – 2005*

Metodologie

de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat – 2005

I. Dispoziţii generale

Art.1. (1) Examenul de bacalaureat este modalitatea esenţială de evaluare a cunoştinţelor, a competenţelor, a nivelului de cultură generală şi de specializare atins de absolvenţii de liceu. El le permite acestora accesul către învăţământul superior sau către piaţa muncii.

(2) Dreptul de a susţine bacalaureatul îl au elevii care au promovat ultima clasă de liceu, învăţământ liceal de zi, seral sau cu frecvenţă redusă.

(3) Ministerul Educaţiei şi Cercetării organizează două sesiuni de bacalaureat, în fiecare an şcolar.

(4) Pentru anumite filiere, profiluri şi specializări, stabilite de Ministerul Educaţiei şi Cercetării prin ordin al ministrului, studiile liceale se pot încheia şi cu un examen de certificare/atestare a competenţelor profesionale, separat de examenul de bacalaureat, în condiţiile legii. Metodologia de organizare şi desfăşurare a examenului de certificare/atestare a competenţelor profesionale se aprobă prin ordin separat.

Art.2. (1) Candidaţii proveniţi din învăţământul de stat au dreptul să susţină examenul de bacalaureat, fără taxă, de cel mult două ori. Prezentările ulterioare la examen sunt condiţionate de achitarea unor taxe.

(2) Candidaţii proveniţi din învăţământul particular vor susţine examenul de bacalaureat, cu taxă, în centrele de examen stabilite de inspectoratele şcolare judeţene (al municipiului Bucureşti).

(3) Taxele de examen menţionate la alineatele (1) şi (2) se stabilesc de fiecare inspectorat şcolar în parte. Stabilirea cuantumului taxelor se face diferenţiat, în funcţie de numărul de probe pe care le susţine candidatul şi luându-se în calcul toate cheltuielile necesare pentru fiecare candidat.

Art.3. (1) Candidaţii care nu au promovat examenul de bacalaureat în sesiunile anului 2003 sau ale anului 2004, pot solicita recunoaşterea unora dintre probele orale, scrise sau practice promovate în sesiunile menţionate.

(2) Recunoaşterea unora dintre probele promovate este condiţionată de solicitarea scrisă de recunoaştere a probelor promovate în sesiunile menţionate la alin. (1), care se face în momentul înscrierii pentru una din sesiunile anului 2005. Candidaţii vor preciza în cererea scrisă probele (a – f) la care doresc să li se recunoască rezultatele obţinute în sesiunile menţionate la alin.(1), precum şi disciplinele susţinute în cadrul fiecărei probe. Aceştia vor preciza, de asemenea, care sunt probele, respectiv disciplina pe care doresc să o susţină la fiecare probă, precum şi tipul de subiect pentru disciplina respectivă.

Scanned with OKEN Scanner

(3) Nedepunerea cererii de recunoaştere a uneia dintre probele promovate într-o sesiune, cumulată cu susţinerea din nou a acestei probe în altă sesiune, conduc la prescrierea dreptului de a solicita recunoaşterea notei iniţiale. Aşadar, în cazul în care candidatul a susţinut, în sesiuni succesive, aceeaşi probă, la o eventuală nouă cerere de recunoaştere a probei respective, i se va recunoaşte ultima notă obţinută la probă.

Art.4. (1) Conform Legii Învăţământului nr.84/1995, republicată, cu modificările şi completările ulterioare, examenul naţional de bacalaureat constă în susţinerea a două, respectiv, a trei probe comune şi a trei probe diferenţiate, în funcţie de filieră şi profil.

Probele comune sunt următoarele:

a) limba şi literatura română - scris şi oral;

b) una din limbile moderne de circulaţie internaţională studiate în liceu - oral;

c) - limba maternă - scris şi oral, pentru elevii care au urmat studiile liceale într-o limbă a minorităţilor naţionale;

- limba şi literatura într-o limbă de circulaţie internaţională pentru elevii care au urmat studiile liceale cu limba de predare în limba de circulaţie internaţională respectivă.

Probele de examen, diferenţiate în funcţie de filieră, profil, specializare şi de opţiunea elevului, sunt următoarele:

Filiera teoretică

Profil umanist:

d) istorie sau geografie - probă scrisă;

e) o probă la alegere din aria curriculară, corespunzătoare specializării - probă scrisă;

f) o probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele susţinute anterior

- probă scrisă sau practică.

Profil real:

d) matematică - probă scrisă;

e) o probă la alegere din aria curriculară, corespunzătoare specializării - probă scrisă;

f) o probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele susţinute anterior

- probă scrisă sau practică.

Filiera tehnologică

d) matematică – pentru toate profilurile şi specializările - probă scrisă;

e) o proba la alegere din aria curriculară „Tehnologii", în funcţie de specializarea aleasă de elev - probă scrisă;

f) o probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele alese anterior - probă scrisă sau practică;

Filiera vocaţională

d) istorie sau geografie ori o disciplină socio-umană, respectiv matematică sau ştiinţe, în funcţie de profil - probă scrisă;

Scanned with OKEN Scanner

e) o probă la alegere din ariile curriculare specifice profilului şi specializării - probă scrisă sau practică;

f) o probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele alese anterior - probă scrisă sau practică.

(2) Stabilirea listei disciplinelor la alegere menţionate în lege, precum şi a programelor disciplinelor de examen, se face prin ordin separat.

(3) La proba comună b) – una din limbile moderne de circulaţie internaţională studiate în liceu – elevii pot alege oricare limbă modernă studiată, indiferent dacă este limba 1, limba a 2-a sau limba a 3-a de studiu, dacă a fost studiată în regim normal, intensiv, bilingv sau opţional. Examenul se susţine în conformitate cu programa de bacalaureat pentru limba aleasă, valabilă pentru respectiva sesiune de bacalaureat.

(4) Precizările de la alin. (3) se aplică şi în cazul în care candidatul optează pentru susţinerea unei limbi străine la proba scrisă e) sau la proba f).

Art.5. (1) Pentru candidaţii proveniţi din promoţii de până în anul 2002 inclusiv, de la învăţământ de zi, sau de până în anul 2003 inclusiv, de la învăţământ seral sau cu frecvenţă redusă, se va face asimilarea specializării absolvite cu una din specializările în vigoare pentru promoţia 2005.

(2) Pentru filiera teoretică, asimilarea specializărilor se face astfel:

Specializare	Specializare asimilată
Limbi moderne Limbi clasice	Filologie
Istorie - ştiinţe sociale	Ştiinţe sociale
Matematică - fizică	Matematică - informatică
Fizică - chimie Chimie - biologie	Ştiinţe ale naturii

(3) Pentru filierele tehnologică şi vocaţională, asimilarea specializărilor se face de către comisia judeţeană de bacalaureat, după consultarea comisiei naţionale.

Art.6. (1) Finalizarea studiilor liceale se atestă printr-un certificat de absolvire, care conferă dreptul de acces, în condiţiile legii, în învăţământul postliceal, dreptul de susţinere a examenului de bacalaureat, respectiv a examenului de certificare/ atestare a competenţelor profesionale.

(2) Absolvenţilor de liceu fără diplomă de bacalaureat li se eliberează, la cerere, şi copie de pe foaia matricolă.

(3) În urma promovării examenului de bacalaureat, absolventului i se eliberează diplomă de bacalaureat.

(4) Absolvenţii care au promovat toate clasele liceale cu medii generale de minimum 9,50, iar la examenul de bacalaureat au obţinut media 10, primesc diplomă de merit.

Scanned with OKEN Scanner

II. Organizarea examenului național de bacalaureat

Art.7. Coordonarea pe plan național privind organizarea bacalaureatului este asigurată de Comisia Națională de Bacalaureat, care se constituie în fiecare an prin ordin al ministrului și funcționează în Ministerul Educației și Cercetării. În fiecare județ și în municipiul București se constituie anual centre de examen, în care se desfășoară probele scrise, orale și, după caz, cele practice și centre zonale de evaluare, precum și comisii județene (a municipiului București) de bacalaureat, comisii de examen în centrele de examen și în centrele zonale de evaluare, în conformitate cu prezenta metodologie.

[...]

III. Înscrierea candidaților

Art.20. (1) Înscrierea candidaților pentru bacalaureat se face la secretariatele liceelor, numai în perioada prevăzută în calendarul examenului, după cum urmează:

a) pentru candidații din seria curentă, tabelele de înscriere sunt întocmite de profesorii diriginți, în conformitate cu evidențele din licee. Tabelele cuprind opțiunile pentru probele de examen și semnătura elevilor;

b) pentru candidații din anii precedenți, înscrierea se face de secretarii liceului din centrul de examen la care este arondat liceul pe care candidații l-au absolvit, pe baza actelor prezentate de aceștia (certificate de naștere și, după caz, de căsătorie, foaia matricolă și situația școlară din clasele liceale). În situația schimbării domiciliului în altă localitate, menționată ca atare în buletinul de identitate, candidații din seriile precedente se pot înscrie pentru a susține bacalaureatul la un liceu de același profil, stabilit de comisia județeană de bacalaureat din județul în care se află noul domiciliu al candidatului.

(2) Candidații care au fost respinși la bacalaureat în sesiunile anului 2003 sau ale anului 2004 și care solicită recunoașterea unor probe promovate în aceste sesiuni, vor prezenta la înscriere și o adeverință, eliberată de liceul pe care candidatul l-a absolvit, din care să reiasă rezultatele obținute la examenul de bacalaureat în sesiunile menționate. Adeverința va preciza, pentru fiecare sesiune, disciplina susținută și nota obținută la fiecare din probele a - f și va indica probele pentru care s-a solicitat recunoașterea rezultatelor din sesiuni anterioare. In cazul în care candidatul nu s-a prezentat sau a fost eliminat la una sau mai multe probe, acest lucru va fi menționat în adeverință. Adeverința va fi semnată de directorul și secretarul unității de învățământ absolvite și va purta sigiliul acesteia.

Art.21. Până la data de **15 martie,** toți elevii din clasele liceale terminale își vor exprima, în scris, opțiunile pentru obiectele de studiu prevăzute pentru probele la alegere, la care doresc să susțină bacalaureatul.

Art.22. Directorii unităților de învățământ liceal centralizează opțiunile și transmit situația inspectoratelor școlare județene (al municipiului București) până la data de **1 aprilie**.

Scanned with OKEN Scanner

Art.23. (1) Inspectoratele şcolare judeţene (al municipiului Bucureşti) centralizează opţiunile comunicate de licee şi transmit Serviciului Naţional de Evaluare şi Examinare necesarul de subiecte până la data de **15 aprilie** pentru prima sesiune şi până la data de **25 iulie** pentru a doua sesiune de examen.

(2) Tabelele de înscriere la prima sesiune a examenului de bacalaureat, pentru absolvenţii din seria curentă, întocmite conform calendarului, se actualizează după încheierea semestrului al doilea (prin eliminarea candidaţilor corigenţi, repetenţi, cu situaţia neîncheiată sau exmatriculaţi) şi se transmit, în termen de trei zile de la încheierea cursurilor, semnate şi stampilate de director, centrului de examen la care şcoala este arondată. De corectitudinea datelor transmise centrului de examen, răspunde directorul unităţii de învăţământ la care candidaţii au absolvit cursurile liceale.

(3) Pentru a doua sesiune de bacalaureat, înscrierea candidaţilor se face conform graficului anunţat. Pentru elevii de clasa a XII-a, care susţin examene de corigenţă se va stabili, în graficul corigenţelor o zi specială de înscriere pentru sesiunea a doua de bacalaureat. Lista centrelor de examen, cu unităţile arondate şi a centrelor zonale de evaluare se transmite, în scris, la Direcţia Generală pentru Învăţământ Preuniversitar şi în format electronic la Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare, până la data de **25 iulie**. Lista cadrelor didactice din rândul cărora se vor desemna vicepreşedinţii comisiilor din centrele de bacalaureat se transmite în scris la Direcţia Generală pentru Învăţământ Preuniversitar şi în format electronic, la Direcţia Generală Logistică, Administrativ şi Resurse Umane, până la data de **25 iulie**.

IV. Conţinutul examenului

Art.24. Disciplinele de studiu la care se organizează probele pentru bacalaureat sunt stabilite de Ministerul Educaţiei şi Cercetării. Precizarea exactă a acestora, precum şi a programelor de examen se face printr-un ordin separat al ministrului.

V. Stabilirea subiectelor pentru probele de examen

Art.25. (1)Pentru fiecare probă scrisă se stabilesc variante de subiecte din care se alege, prin tragere la sorţi, numărul subiectului probei scrise şi al subiectului de rezervă.

(2) Subiectele pentru probele de examen se realizează la Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare şi se stabilesc ţinându-se seama de următoarele criterii:

a) să fie în concordantă cu programele şcolare şi cu programele de bacalaureat aprobate şi publicate de Ministerul Educaţiei şi Cercetării;

b) să fie astfel formulate încât tratarea lor să angajeze cât mai multe posibilităţi de analiză, de sinteză şi de generalizare din partea candidaţilor;

c) să asigure o cuprindere echilibrată a materiei studiate, să aibă grad de complexitate corespunzător conţinutului programelor şcolare şi programelor de bacalaureat, pentru a fi tratate în timpul stabilit;

d) să permită tratarea lor în timpul acordat candidaţilor pentru rezolvare: 3 ore;

e) subiectele şi baremele se vor elabora astfel încât să se asigure unitatea de

Scanned with OKEN Scanner

evaluare la nivel național.

Art.26. (1) Subiectele pentru probele orale se elaborează la nivel național și cuprind teme (probleme) din programele pentru bacalaureat. Tematica și cerințele detaliate/subiectele vor fi făcute publice și transmise inspectoratelor școlare cu cel puțin 15 de zile înaintea începerii probelor.

(2) Comisiile de examen vor asigura, prin profesorii examinatori, întocmirea biletelor de examen, în preziua începerii probelor orale.

(3) Subiectele de pe biletele de examen vor avea un grad de complexitate care să permită tratarea lor integrală în maximum 10-15 minute.

[...]

Art.32. (1) Timpul destinat elaborării unei lucrări scrise este de trei ore, socotit din momentul în care s-a încheiat distribuirea subiectelor fotocopiate pentru fiecare candidat.

(2) Pentru elaborarea lucrării scrise, candidații folosesc numai cerneală sau pastă de culoare albastră, iar pentru executarea schemelor și a desenelor folosesc numai creion negru.

(3) Se interzice folosirea, în timpul probelor scrise, a minicalculatoarelor, a riglelor de calcul, a altor mijloace de calcul. Nu se folosește altă hârtie decât cea distribuită candidaților de supraveghetori. Fiecare candidat primește atâtea coli tipizate câte îi sunt necesare.

(4) Candidații care doresc să corecteze o greșeală taie fiecare rând din pasajul greșit cu o linie orizontală. În cazul în care unii candidați, din diferite motive (corectări numeroase și greșeli care ar putea fi interpretate drept semn de recunoaștere), doresc să-și transcrie lucrarea, fără să depășească timpul stabilit, aceștia primesc alte coli tipizate. Acest lucru este consemnat de către supraveghetori în procesul-verbal de predare/primire a lucrărilor scrise. Colile folosite inițial se anulează pe loc de către supraveghetori, menționându-se pe ele „anulat", se semnează de cei doi supraveghetori și se păstrează în condițiile stabilite pentru lucrările scrise.

(5) Fiecare candidat primește atâtea coli de ciornă câte îi sunt necesare.

[...]

Art.35.

[...]

(4) Evaluarea și notarea lucrărilor scrise din fiecare set se efectuează de doi profesori evaluatori, care lucrează în mod obligatoriu în încăperi separate, stabilite de președintele comisiei. În fiecare sală se află cel puțin trei profesori evaluatori. Schimbarea lucrărilor de la primul evaluator la al doilea și invers se va face în prezența președintelui sau a vicepreședintelui comisiei. Pe perioada evaluării au voie să intre în săli, în afara evaluatorilor înșiși, doar președintele și vicepreședintele comisiei județene (a municipiului București), președintele și vicepreședintele centrului de evaluare, reprezentanții Comisiei Naționale de Bacalaureat, persoane împuternicite cu delegație de către comisia județeană (a municipiului București) pentru a controla desfășurarea bacalaureatului.

Scanned with OKEN Scanner

(5) Fiecare lucrare se evaluează și se apreciază de fiecare evaluator, separat, cu note de la **10** la **1**, respectându-se baremele de evaluare și notare stabilite de Comisia Națională. Greșelile vor fi evidențiate prin subliniere cu pix, stilou sau creion de culoare roșie.

Evaluarea și notarea pe baza baremului se înregistrează în borderouri separate pentru fiecare evaluator.

[...]

Art.36. (1) După încheierea de către ambii profesori a acțiunii de evaluare și de notare, borderourile întocmite și semnate de fiecare profesor evaluator sunt predate președintelui comisiei o dată cu lucrările evaluate. După ce președintele comisiei se asigură că între notele acordate de cei doi profesori evaluatori este o diferență de cel mult un punct, notele obținute se trec pe fiecare lucrare în parte, cu cerneală roșie, de profesorii evaluatori și se semnează de aceștia. Media finală se trece pe lucrare, în prezența profesorilor evaluatori, de către președintele comisiei. Președintele comisiei verifică media finală, ca medie aritmetică cu două zecimale a notelor acordate de evaluatori, fără rotunjire și semnează alături de evaluatori.

(2) În cazul în care se constată o diferență mai mare de un punct între notele celor doi evaluatori, președintele repartizează lucrarea spre reevaluare unui alt profesor de specialitate care, în prezența profesorilor evaluatori inițiali, stabilește nota finală a lucrării. Nota dată la reevaluare este nota care se trece pe lucrare; sub notă vor semna cei trei evaluatori și președintele comisiei. Numărul setului și numărul de ordine al lucrărilor care necesită a treia evaluare este consemnat într-un proces-verbal, semnat de cei amintiți anterior.

[...]

Probele orale și practice

Art.38. (1) Candidații intră în sala de examen în ordinea afișată, respectându-se ora prevăzută pentru fiecare grupă. Fiecare candidat prezintă comisiei documentul de identitate și fișa individuală pentru consemnarea rezultatelor la examinările orale și practice. Comisia de bacalaureat verifică identitatea fiecărui candidat.

(2) Candidatul la probele orale extrage un bilet și primește hârtie ștampilată pentru ciornă. El **are dreptul să ia un al doilea bilet, caz în care nota va fi scăzută cu două puncte.**

(3) Pentru elaborarea răspunsurilor se acordă fiecărui candidat l 5 – 20 de minute.

(4) Examinarea orală se realizează de către cei doi profesori examinatori membri ai comisiei.

Profesorii examinatori pot interveni cu întrebări lămuritoare sau suplimentare, de regulă după ce candidatul și-a prezentat răspunsurile.

(5) Examinarea la probele orale se desfășoară în prezența a cel puțin 3 candidați.

Art.39. (1) Fiecare profesor examinator evaluează răspunsul candidatului de la probele orale cu **note întregi de la 1 la 10,** în funcție de punctajul orientativ de evaluare. Dacă baremul conduce la punctaje fracționare, acestea se rotunjesc la cel

Scanned with OKEN Scanner

mai apropiat întreg (în cazul fracțiunilor de 50 de sutimi, rotunjirea se face în favoarea elevului). Punctajul de evaluare va fi consemnat pe borderourile individuale ale profesorilor examinatori.

(2) Dacă între notele celor doi examinatori există o diferență de cel mult un punct, atunci se calculează nota finală la proba orală respectivă, ca medie aritmetică cu două zecimale, fără rotunjire din notele acordate de cei doi examinatori. Președintele comisiei mediază situațiile în care diferența dintre notele celor doi evaluatori este mai mare de un punct și hotărârea sa, fundamentată pe punctajul acordat candidatului de cei doi examinatori, este definitivă. Situațiile în care este necesară medierea președintelui sunt consemnate într-un proces verbal, la care se atașează copii de pe evaluările celor doi examinatori.

(3) Fiecare profesor trece în borderou nota acordată, iar președintele nota finală.

Nota finală la examenul oral se trece în catalog și în fișa individuală a candidatului, cu semnătura celor doi profesori examinatori. La fiecare probă orală, fișa individuală pentru consemnarea rezultatelor la examinările orale și practice se înmânează candidatului, după consemnarea notei.

(4) După susținerea probei orale, candidatul predă biletul de examen și ciorna semnată.

(5) Un candidat se consideră promovat la proba orală dacă a obținut minimum nota finală 5 (cinci) la respectiva probă. In caz contrar, candidatul este declarat "respins" la proba orală respectivă.

(6) Probele orale sunt eliminatorii. Candidatul care a obținut o notă sub 5 (cinci) sau nu s-a prezentat la o probă orală este declarat "respins", respectiv „neprezentat" la examenul de bacalaureat și nu mai participă la probele următoare.

Art.40. Desfășurarea probelor orale are caracter public. În unele situații, președintele poate dispune întreruperea examinării și eliminarea din sală a persoanelor cu atitudine și comportament necorespunzătoare.

Art.41. Notele de la probele practice se trec în fișa individuală a candidatului, imediat după încheierea susținerii probei de către acesta. Apoi, fișa se înmânează candidatului.

VII. Stabilirea și comunicarea rezultatelor

Art.42. (1) După încheierea probelor din cadrul examenului de bacalaureat și după evaluarea și notarea tuturor lucrărilor scrise, se comunică rezultatele finale pentru toți candidații.

(2) Pentru fiecare candidat care a obținut cel puțin nota **cinci** la toate probele orale, scrise sau practice de examen, se calculează media generală de bacalaureat ca medie aritmetică, cu două zecimale, fără rotunjire, din notele obținute la probele orale, scrise sau practice de examen.

(3) Pentru candidații din seriile precedente, care au solicitat recunoașterea unor probe orale care au fost evaluate cu calificativul admis, și care au obținut cel puțin nota 5 (cinci) la fiecare din celelalte probe, se calculează media generală de bacalaureat ca medie aritmetică, cu două zecimale, fără rotunjire, din notele obținute la probele orale, scrise sau practice de examen care au fost apreciate cu note.

Scanned with OKEN Scanner

(4) Nu se calculează media generală pentru candidații care nu au promovat una sau mai multe probe, care nu s-au prezentat la toate probele sau care au fost eliminați la o probă.

(5) Se consideră că un candidat a promovat toate probele și, deci, a promovat examenul de bacalaureat, dacă acesta îndeplinește simultan următoarele condiții: a obținut cel puțin nota 5 sau calificativul admis la fiecare probă orală, a obținut cel puțin nota 5 la fiecare probă scrisă sau practică de examen și are media generală minimum 6,00. În acest caz, candidatul este declarat „reușit".

Pentru candidații care obțin media generală 5,99, media generală se rotunjește la 6,00.

(6) Candidații care s-au prezentat la toate probele de examen, dar nu îndeplinesc simultan condițiile menționate la alin.(4) sunt declarați „respinși".

(7) Candidații care au promovat probele orale, dar au lipsit la cel puțin o probă scrisă de examen sunt declarați „neprezentați". Un candidat care a absentat la o probă scrisă se poate prezenta la probele scrise următoare, dar nu i se calculează media generală. Se consideră că acești candidați nu au promovat examenul de bacalaureat.

(8) Candidații care au fost eliminați de la o probă, nu mai pot participa la probele următoare și sunt declarați „eliminați din examen". Se consideră că acești candidați nu au promovat examenul de bacalaureat.

(9) Candidaților declarați respinși, neprezentați sau eliminați li se consemnează aceasta pe foaia matricolă. Mențiunea respectivă se face și în registrul matricol. În cazul candidaților proveniți de la alte unități de învățământ, comisia de examen va anunța în scris rezultatul la liceul de unde provine candidatul.

(10) Pentru comunicarea rezultatelor finale ale bacalaureatului se întocmesc și se afișează liste nominale care cuprind: numele și prenumele candidaților, notele obținute la fiecare probă scrisă, practică sau orală, media generală (acolo unde este cazul) și rezultatul final („reușit", „respins", „neprezentat", "eliminat din examen").

(11) Pentru candidații care au solicitat recunoașterea unor probe promovate în sesiunile anterioare, în lista menționată la alin.(10), notele recunoscute din sesiunile anterioare se marchează cu un asterisc și se precizează, ca notă de subsol, faptul că au fost obținute în sesiunile anterioare.

Art.43. Pentru candidații proveniți de la alte licee decât cel în care este organizat centrul de examen, comisia de examen întocmește extrase din catalog, care cuprind situația lor la examen și le transmit liceelor respective, în vederea completării diplomelor de bacalaureat.

VIII. Depunerea si rezolvarea contestațiilor

Art.44. (1) Nu se admit contestații la probele orale și practice (cu excepția probei de dicteu melodic și armonic, de la profilul artistic – muzică).

(2) Contestațiile la probele scrise se depun și se înregistrează la centrul de examen, în perioada prevăzută de calendarul examenului de bacalaureat.

(3) Președintele, împreună cu un membru al comisiei din centrul de examen, primesc contestațiile și le înregistrează.

Scanned with OKEN Scanner

[...]

Art.46. (1) Comisiile judeţene (a municipiul Bucureşti) sau regionale de contestaţii reevaluează lucrările primite şi acordă note lucrărilor contestate, conform baremelor pentru probele scrise.

(2) Pentru lucrările care au primit la comisia de evaluare note de până la 9,50, nota acordată iniţial se modifică, prin creştere sau descreştere, dacă între nota iniţială şi nota acordată de comisia de contestaţii se va constata o diferenţă de cel puţin 0,50 puncte. Dacă diferenţa dintre cele două note este mai mică de 0,50 puncte, nota iniţială rămâne neschimbată.

(3) Pentru lucrările care au primit iniţial cel puţin nota 9,50, nota definitivă este nota acordată de comisia de contestaţii.

(4) Notele stabilite de comisia de contestaţii, conform alin. (2) şi (3), sunt definitive, după validarea lor de către preşedintele comisiei. Deciziile comisiei se consemnează într-un proces-verbal care este semnat de către toţi membrii comisiei.

(5) Lucrările scrise se restituie comisiilor judeţene de la care provin, care le distribuie centrelor de evaluare, împreună cu o copie de pe procesul verbal. O copie a procesului verbal în care sunt consemnate deciziile comisiei de contestaţii este predată delegatului fiecărui centru de examen care a înaintat cereri de reevaluare a lucrărilor scrise. Borderourile de corectare de la comisia de contestaţii şi procesul-verbal se păstrează la sediul inspectoratului şcolar respectiv timp de doi ani.

(6) În cazul în care se constată diferenţe mai mari de **1,50 puncte** – în plus sau în minus – între nota iniţială şi nota de la contestaţii, inspectoratele şcolare analizează situaţia în termen de 30 zile de la terminarea contestaţiilor, consultând profesorii evaluatori din ambele comisii (cea din centrul zonal de evaluare şi cea de la contestaţii) şi decid sancţionarea celor vinovaţi. Comisia Naţională va fi înştiinţată de sancţiunile aplicate, până la data de **1 noiembrie** a anului în care s-a desfăşurat examenul.

(7) În perioada de evaluare a probelor scrise sau ulterior, Comisia Naţională de Bacalaureat poate desemna, după caz, comisii de reevaluare prin sondaj a unui număr de lucrări, urmărindu-se corectitudinea respectării baremelor. Comisia Naţională propune inspectoratelor şcolare sancţiuni, în cazul constatării unor nereguli flagrante. Reevaluarea nu conduce la modificarea notelor candidaţilor.

Art.47. (1) Comisiile de bacalaureat din centrele de examen operează în cataloage schimbările care se impun după aflarea rezultatelor la contestaţii, recalculează, după caz, media generală de bacalaureat şi rectifică în mod corespunzător rezultatul examenului.

(2) Rezultatele la contestaţii se comunică celor în drept prin afişare la avizierul centrului de examen, conform calendarului.

Art.53. (1) Respectarea întocmai a Metodologiei de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat este obligatorie pentru toate persoanele implicate în examen.

Scanned with OKEN Scanner

(2) Orice abatere comisă şi dovedită cu probe se sancţionează după cum urmează:

a) candidaţii care în timpul desfăşurării probelor de examen au introdus în sălile de examen materiale ajutătoare sau mijloace electronice de calcul sau de comunicare sau care sunt surprinşi copiind ori transmiţând soluţii ale subiectelor sunt eliminaţi din examen, pierzând sesiunea respectivă;

b) cadrele didactice care, în perioada examenului, comit fapte cu caracter infracţional (furnizarea soluţiilor problemei, înlocuiri de lucrări, falsificări de lucrări) sau au manifestări care atestă neglijenţă în îndeplinirea atribuţiilor de supraveghetor (tolerarea unor acţiuni sau intenţii de fraudă ale candidaţilor, părăsirea nejustificată a sălii de examen şi altele) sunt sancţionate în conformitate cu prevederile Statutului personalului didactic, sau, după caz, ale Codului penal; aceste cadre didactice vor fi imediat înlocuite din comisie şi li se va interzice participarea în comisiile de examen în sesiunile următoare;

c) profesorii evaluatori care săvârşesc fapte cu caracter infracţional (înlocuiri de lucrări, falsificări de lucrări, modificări de note etc.) sau care manifestă neglijenţă în îndeplinirea răspunderilor de examinator/evaluator se sancţionează conform prevederilor Statutului personalului didactic şi, după caz, ale Codului penal; acestor cadre didactice li se va interzice participarea în comisiile de examen în sesiunile următoare.

(3) Procedura de sancţionare, pentru abaterile personalului didactic menţionate în prezenta metodologie, se desfăşoară în conformitate cu prevederile art.117-123 din Legea nr.128/1997 privind Statutul personalului didactic. Punctul de plecare al cercetării este procesul-verbal alcătuit de organele de control. În baza aceluiaşi proces verbal, inspectoratul şcolar propune sancţiunea.

Inspectoratul şcolar va face comunicare scrisă către unitatea de învăţământ de la care provine cadrul didactic respectiv, în care se precizează abaterea constatată şi propunerea de sancţionare. Abaterile săvârşite de cadrele didactice în timpul participării la comisiile pentru examenul de bacalaureat sunt luate în considerare la acordarea calificativului anual.

(4) Constatarea de nereguli grave sau repetate în desfăşurarea activităţii unei comisii de bacalaureat aduce după sine diminuarea cu 20 – 70% a indemnizaţiei vicepreşedintelui şi a preşedintelui. De asemenea, constatarea de nereguli grave duce la înlocuirea din comisie a vinovaţilor. În cazul înlocuirii din comisie, pentru abateri grave, persoana înlocuită nu primeşte indemnizaţia cuvenită respectivei funcţii din comisia de bacalaureat.

Art.54. Candidaţii care au fost înscrişi fără a îndeplini condiţiile legale de înscriere la examen sau care au beneficiat de părtinire frauduloasă, constatată de organele în drept, sunt eliminaţi din examen, pierzând sesiunea respectivă, sau, după caz, acestora li se anulează diploma.

Art.55. (1) La organizarea şi desfăşurarea bacalaureatului în liceele (secţiile de liceu) pentru elevii cu deficienţe vizuale, motorii şi auditive se fac următoarele precizări speciale:

Scanned with OKEN Scanner

a) Pentru un număr de candidaţi care corespunde cel puţin efectivului unei clase speciale de liceu se organizează subcomisii de bacalaureat.

b) Preşedintele comisiei de bacalaureat (din liceu/secţie) va fi, de regulă, un cadru didactic universitar cu specialitatea psiho - pedagogie specială, pedagogie, psihologie sau un profesor cu gradul didactic I, având una dintre specialităţile menţionate anterior.

c) Comisiile de bacalaureat vor asigura condiţii de egalizare a şanselor pentru candidaţii cu deficienţe, prin adaptarea procedurilor de examinare la subiectele de concurs unice, în funcţie de particularităţile individuale şi de cele specifice deficienţei respective.

(2) Exemple de asemenea adaptări sunt:

• asigurarea posibilităţii de comunicare prin utilizarea sistemului Braille, la elevii nevăzători, respectiv a limbajului mimico - gesticular la elevii cu deficienţe de auz (inclusiv posibilitatea asigurării, după caz, a unui interpret autorizat);

• mărirea cu 1-1,5 ore a timpului destinat efectuării lucrării scrise de către candidaţii cu deficienţe fizice (motorii) sau vizuale;

• asigurarea scrisului cu caractere mărite la candidaţii ambliopi;

• transmiterea prin dictare, la elevii cu anumite deficienţe, a informaţiilor corespunzătoare subiectelor de examen afişate/prezentate vizual;

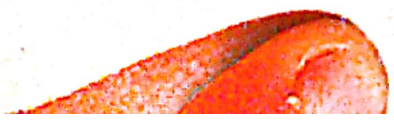
• realizarea probei scrise prin dictarea conţinutului acesteia, de către candidatul cu deficienţe, către un profesor asistent, de altă specialitate decât cea la care se desfăşoară proba respectivă.

(3) Candidaţii cu deficienţe din liceele obişnuite pot beneficia, după caz, de prevederile punctului anterior, în baza certificatului de handicapat sau a unei adeverinţe medicale. Acolo unde nu se pot realiza condiţii de egalizare a şanselor, candidaţii vor fi orientaţi spre comisia de bacalaureat dintr-un liceu special.

(4) Comisia Naţională de Bacalaureat poate aproba şi alte proceduri de susţinere a examenului de bacalaureat pentru candidaţii cu deficienţe/handicap, la propunerea comisiilor judeţene.

Art.56. În situaţii excepţionale, pentru elevii imobilizaţi la pat, temporar sau definitiv, pentru cei şcolarizaţi la domiciliu, comisiile judeţene de bacalaureat pot organiza susţinerea probelor la locul imobilizării, simultan cu toţi candidaţii din ţară. Organizarea acestor probe se face cu avizul comisiei naţionale, la cererea candidatului şi în baza unui document medical care să ateste **imposibilitatea deplasării.**

Art.57. Se interzice cu desăvârşire colectarea unor fonduri materiale sau băneşti de la candidaţi, de la părinţii acestora sau de la orice persoană care are rude în rândul candidaţilor la bacalaureat. Cei dovediţi încălcând aceasta dispoziţie vor fi sancţionaţi conform Statutului personalului didactic sau Codului penal, după caz.



Scanned with OKEN Scanner

Clasa a IX-a

SE ADRESEAZĂ URMĂTOARELOR TIPURI DE LICEE:

- **liceul teoretic:** specializările matematică-informatică, științe ale naturii
- **liceul tehnologic:** profilurile tehnic, toate specializările cu excepția specializărilor pielărie și textile
- **liceul vocațional:** profil militar (al M.Ap.N. și M.I.) specializarea matematică-informatică

CONȚINUTURI

Algebră

1. Operații cu numere reale

- forme de scriere a unui număr rațional
- puteri cu exponent întreg
- radicali de ordinul 2 sau 3, **radicali de ordinul n*
- **puteri cu exponent rațional*
- operații cu numere reale; proprietăți
- compararea a două numere reale; modulul unui număr real; **inegalități*
- partea întreagă și partea fracționară; rotunjiri, aproximări, trunchieri

2. Rezolvări de ecuații

- ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- ecuații iraționale simple (cu radicali de ordinul 2 sau 3)
- ecuații reductibile la cele studiate

3. Elemente de logică matematică

- enunț, propoziție, valoare de adevăr
- predicat, cuantificatori
- operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate)
- **condiții necesare; condiții suficiente*
- tipuri de raționamente logice: reducerea la absurd, inducția matematică

4. Funcții

- produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulțimi numerice
- funcția: definiție, exemple de corespondențe care nu sunt funcții, modalități de a defini o funcție, egalitatea a două funcții, graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului, lecturi grafice

Scanned with OKEN Scanner

- funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

- studierea raportului $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$

- monotonie; semn; reprezentarea grafică a funcției

- sisteme de tipul $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, a, b, c, m, n, p numere reale

- inecuații de forma $ax + b \leqslant 0$ $(\geqslant, <, >)$

- separarea planului în regiuni

- funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (funcția de gradul al doilea)

- monotonia, rata creșterii (descreșterii): $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_1$

- reprezentarea grafică a funcției

- semnul funcției

- inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ $(\geqslant, <, >)$

- reprezentarea grafică a unei funcții de forma $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$

- rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$

- **rezolvarea unor sisteme reductibile la cele studiate*

- sisteme de inecuații de tipul celor studiate

- operații cu funcții: adunarea, înmulțirea, împărțirea, compunerea

- **inversa unei funcții*

- **alte exemple de funcții (funcția radical, funcția putere, funcția* $f(x) = \frac{1}{x}$*) funcția modul*

Geometrie și trigonometrie

1. Paralelism și calcul vectorial

- vectori, egalitatea a doi vectori, suma a doi vectori

- produsul unui vector cu un număr real

- descompunerea unui vector după direcții date

- coliniaritatea a doi vectori; probleme de coliniaritate

- reper cartezian; coordonate carteziene; distanța dintre două puncte

---

Notă. Se marchează cu asterisc (conform ordinului nr. 3915 din 31.05.2001): Reper cartezian în spațiu. Vectori în spațiu. Operații cu vectori în spațiu

Scanned with OKEN Scanner

- coordonatele unui vector; coordonatele unei sume vectoriale; coordonatele unui produs dintre un vector și un număr real

- ecuația dreptei determinate în plan de un punct și de o direcție dată; ecuația dreptei determinată în plan de două puncte

- recunoașterea paralelismului sau a concurenței a două drepte

- **translația*

• exprimarea translației de vector dat

• conservarea lungimii unui segment, a măsurii unui unghi și a raportului lungimilor a două segmente; conservarea ariei

- **omotetie; exprimarea omotetiei de centru și raport dat*

• conservarea raportului lungimilor a două segmente, a măsurii unghiului prin omotetie

• valorificarea teoremei lui Thales

• rezolvarea unor probleme de coliniaritate și paralelism cu ajutorul omotetiei

2. Relații metrice în plan și în spațiu utilizând elemente de trigonometrie

- rezolvarea triunghiului dreptunghic

- cercul trigonometric; sin, cos, tg, ctg

- reducerea la primul cadran; formule trigonometrice fundamentale: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$

- alte formule trigonometrice (pentru $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, * $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$)

- **transformarea sumelor în produs, exprimarea sinx, cosx, tgx în funcție de* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

- modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi

• teorema sinusurilor

• teorema cosinusului

• rezolvarea triunghiului oarecare; formule pentru aria triunghiului

- **unghiuri și distanțe în spațiu*

- definirea funcțiilor trigonometrice sin, cos, tg, ctg; **paritate,* periodicitate; reprezentare grafică (prin puncte)

- rezolvarea unor ecuații de forma $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$; **rezolvarea unor ecuații reductibile la acestea.*

Scanned with OKEN Scanner

SE ADRESEAZĂ URMĂTOARELOR SPECIALIZĂRI:

- filiera teoretică: specializările matematică-informatică, științe ale naturii
- filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
- filiera vocațională, profilul militar (M.Ap.N. și M.I.) specializarea matematică-informatică

Clasa a X-a

Progresii

- Progresii aritmetice
- Progresii geometrice

Funcții

- Funcția exponențială
- Funcția logaritmică
- Ecuații și inecuații exponențiale sau logaritmice
- **Sisteme de ecuații și sisteme de inecuații exponențiale și logaritmice*
- Lecturi grafice: monotonie, convexitate, concavitate, comportament asimptotic (idee intuitivă); injectivitate, surjectivitate, bijectivitate
- Funcții trigonometrice inverse; ecuații trigonometrice; **inecuații trigonometrice (rezolvare grafică)*

Elemente de geometrie în plan și în spațiu

- Numere complexe sub forma algebrică; conjugatul; operații cu numere complexe
- Interpretarea geometrică a adunării, a scăderii numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real
- Numere complexe sub forma trigonometrică; produsul; puterea (formula lui Moivre); rădăcinile de ordinul *n* ale unității; interpretarea geometrică a înmulțirii numerelor complexe sub formă trigonometrică; aplicații ale numerelor complexe în geometrie
- **Transformări geometrice (translație, simetrie, rotație, omotetie; legătura cu operațiile cu vectori și cu numerele complexe).*
- Produsul scalar a doi vectori în plan și în spațiu; condiții de perpendicularitate
- Poziții relative în spațiul tridimensional[1] :

- drepte și plane în spațiu
- pozițiile relative a două plane în spațiu: plane incidente, plane paralele, plane perpendiculare
- pozițiile relative a două drepte în spațiu: drepte oarecare, drepte paralele, drepte perpendiculare
- unghiul a două drepte, unghiul a două plane, unghiul unei drepte cu un plan

[1] În aplicarea efectivă la clasă, aceste elemente de conținut vor fi actualizate prin probleme, evitând o dezvoltare teoretică.

Scanned with OKEN Scanner

• Determinarea distanțelor, ariilor sau a volumelor folosind: calculul sintetic sau vectorial.
• **Tipuri de probleme (secțiuni în corpuri geometrice, principiul lui Cavalieri; corpuri înscrise, corpuri circumscrise).*

Polinoame

• Forma algebrică a unui polinom cu coeficienți complecși; gradul unui polinom, adunarea și înmulțirea polinoamelor; valoarea numerică a unui polinom; rădăcini; funcția polinomială asociată unui polinom; ecuații polinomiale.
• Împărțirea polinoamelor. Teorema împărțirii cu rest. Împărțirea cu $X - a$.
**Studiul divizibilității polinoamelor*
• Descompunerea în factori. Teorema lui Bezout.
• Relații între rădăcini și coeficienți (formulele lui Viete).
• Rădăcinile polinoamelor cu coeficienți reali, raționali, întregi

Elemente de combinatorică

• Probleme de numărare
• Permutări; aranjamente; combinări.
• Binomul lui Newton

Elemente de statistică și probabilități

• Date statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice: diagrame circulare, diagrame prin benzi, histograme.
• Frecvența
• Medii; dispersia.
• Operații cu evenimente.
• Evenimente aleatoare egal probabile. Probabilitatea unui eveniment
• **Variabile aleatoare*
• **Probabilități condiționate.*
• **Scheme clasice de probabilitate (Poisson și Bernoulli)*

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

Elemente de algebră liniară și geometrie analitică[1]

• Reper cartezian în plan și în spațiu. Ecuații ale dreptei în plan; ecuații ale planului și dreptei în spațiu. Condiții de paralelism și perpendicularitate. **Locuri geometrice date prin condiții liniare*

• Matrice. Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea cu scalari, înmulțirea a două matrice; proprietăți.

• Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 4; proprietăți (fără demonstrație). Inversa unei matrice. Ecuații matriceale.

• Aplicații: aria unui triunghi; coliniaritatea a trei puncte;

**calcul de volume.*Probleme de coplanaritate, *probleme de conciclicitate a patru puncte*. Locuri geometrice remarcabile: cercul elipsa, hiperbola, parabola. **Probleme de loc geometric.*

• Sisteme liniare cu cel mult 4 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar. Rangul unei matrice. Metode de rezolvare a sistemelor liniare: rezolvare matriceală, metoda Cramer, metoda Gauss. Interpretarea geometrică a unui sistem liniar cu cel mult 3 necunoscute.

• Aplicații: semiplane; elemente de programare liniară

Elemente de analiză matematică

Șiruri de numere reale

• Dreapta reală

• Monotonie; mărginire, **marginile unei mulțimi.*

• Limita unui șir; șiruri convergente; exemple semnificative: $(a^n)_n$, $(n^a)_n$, $((1+1/n)^n)_n$ (fără demonstrație); șiruri de numere reale ca măsură a unor mărimi din realitate.

• Operații cu șiruri care au limită; cazuri exceptate la limite de șiruri.

• Limita șirurilor monotone. Convergența șirurilor monotone și mărginite (**demonstrație*)

• Numărul e; limita șirului $((1+u_n)^{1/u_n})_n$; $u_n \to 0$

• **Criterii de comparare pentru calculul limitelor de șiruri. Trecerea la limită în inegalități și în relații de recurență*

Limite de funcții

• Limita unei funcții într-un punct; interpretare grafică

• Limitele funcțiilor elementare. Operații cu limite de funcții. Calculul limitelor

• Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții; metode de eliminare a nedeterminării

• **Criterii de existență a limitei*

---

[1] În tratarea acestor teme, ori de câte ori este posibil, se va evidenția legătura între geometria analitică și algebra liniară. Introducerea noțiunii de matrice se va face recurgând la cunoștințele anterioare ale elevilor privitoare la structura de spațiu vectorial pentru $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ utilizând intuitiv legătura între aplicații liniare, matrice și scrierea matriceală a unei aplicații liniare. De asemenea, se recomandă utilizarea sistemelor de 2 ecuații cu 2 necunoscute/ 3 ecuații cu 3 necunoscute, pe care elevii le cunosc din clasele anterioare, în abordarea temelor referitoare la matrice și determinanți.

Scanned with OKEN Scanner

Funcții continue

• Continuitate punctuală; puncte de discontinuitate *(*de speța I, de speța a II-a)*; continuitate pe un interval

• Operații cu funcții continue

• Proprietăți ale funcțiilor continue (legate de rezolvarea de ecuații și inecuații)

Funcții derivabile

• Derivabilitatea într-un punct; derivabilitatea pe un interval; funcția derivată; interpretarea geometrică a derivatei; diferențiala

• Reguli de derivare; derivatele funcțiilor elementare; derivarea funcțiilor compuse.

• **Derivarea inversei unei funcții*

• **Derivata de ordinul n a unei funcții, n>1*

• Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle; șirul lui Rolle. Teorema lui Lagrange. Consecință: derivata într-un punct (**demonstrații*).

• Regulile lui l'Hospital

Reprezentarea grafică a funcțiilor

• Rolul derivatei întâi (intervale de monotonie, punct de extrem); **demonstrarea unor inegalități cu ajutorul derivatelor*

• Rolul derivatei a doua (convexitate și concavitate, punct de inflexiune); **demonstrație*

• Reprezentarea grafică a funcțiilor (inclusiv definirea asimptotelor)

• Reprezentarea grafică a conicelor (cercul, elipsa, parabola, hiperbola). **Proprietăți geometrice ale acestora (intersecții, probleme de tangență).*

Clasa a XII-a

Elemente de algebră[1]

Relații de echivalență. Partiții.

Lege de compoziție. Lege de compoziție internă; tabla operației. Proprietăți

Grup: definiție, exemple: grupuri numerice, **grupuri de transformări geometrice*, grupuri de matrice, **grupul permutărilor de ordinul n*, grupul $\mathbb{Z}_n$.

• Morfisme și izomorfisme de grupuri

• **Grupuri finite: tabla operației, ordinul unui element, aplicații în diverse domenii*

• **Subgrup.*

Inele: definiție, exemple ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, inele de funcții, polinoame, matrice pătratice)

• **Subinele*

Corpuri: Definiție. Exemple ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim)

• Morfisme și izomorfisme de corpuri

**Împărțirea cu rest, descompunerea în factori ireductibili în inelul polinoamelor cu coeficienți în $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$*

---

[1] Toate structurile algebrice vor fi tratate pe exemple cunoscute de elevi din clasele anterioare. Inelele vor fi definite ca inele unitare. Morfismele de inele vor fi definite ca morfisme unitare.

Scanned with OKEN Scanner

Spații vectoriale și aplicații liniare

- Spațiu vectorial peste un corp comutativ; definiție, exemple, bază[1] .
- Spațiile vectoriale: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Baza canonică
- Aplicații liniare. Proiecția, **simetria, rotația și omotetia* ca exemple de aplicații liniare
- Scrierea matriceală a unei aplicații liniare. Operații cu aplicații liniare (adunarea, înmulțirea cu scalari, compunerea, inversa unei aplicații); proprietăți și ilustrarea matriceală a acestora.

Elemente de analiză matematică

- Introducerea noțiunii de integrală (arie, exemple)

Primitive. Integrala nedefinită a unei funcții continue. Primitive uzuale

Metode de calcul al primitivelor

- Integrarea prin părți
- Schimbarea de variabilă[2]

Integrarea funcțiilor raționale (numai integrale de forma: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, unde grad$Q \leqslant 4$) și a funcțiilor trigonometrice prin schimbare de variabilă.

Integrale definite

- Calculul integralei Riemann pentru funcții continue cu ajutorul formulei Leibniz-Newton.
- Liniaritatea integralei, aditivitatea în raport cu intervalul
- **Integrala Riemann a funcțiilor mărginite cu un număr finit de puncte de discontinuitate de speța I*
- Metode de calcul ale integralelor definite:

Integrarea prin părți

Schimbarea de variabilă[3]

- Aplicații:

Calculul ariilor cuprinse între două curbe

Volumul corpurilor

**Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă*

**Aria suprafeței de rotație. Centru de greutate*

**Ecuații diferențiale elementare: exemple de modelare prin ecuații diferențiale a unor fenomene din domeniul științific, economic, social etc. Ecuații cu variabile separabile*

Ecuații diferențiale liniare de ordinul I și II

---

[1] Definițiile și exemplele vor fi cât mai intuitive, legate de descompunerea unui vector după mai multe direcții date.

[2] Se vor aborda primitive care presupun "prima schimbare de variabilă", fără calcule laborioase și fără a utiliza algoritmi consacrați pentru anumite tipuri de integrale (ca de exemplu integralele Cebîșev).

[3] Se vor aborda integrale care presupun „prima schimbare de variabilă", fără calcule laborioase și fără a utiliza algoritmi consacrați pentru anumite tipuri de integrale (de exemplu integralele Cebîșev).

Scanned with OKEN Scanner

M1- specializarea matematică-informatică

I. Statutul disciplinei

Matematica este disciplină obligatorie de examen – *proba d* și disciplină la alegere din profilul opus – *proba f.*

II. Competențe de evaluat

1. Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate de aplicare
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice
3. Utilizarea corectă a algoritmilor matematici și a raționamentelor în rezolvarea de probleme cu diferite grade de dificultate
4. Exprimarea și redactarea corectă și coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme
5. Analiza unei situații problematice și determinarea ipotezelor necesare pentru obținerea concluziei
6. Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin îmbunătățirea sau generalizarea algoritmilor

În plus, se vor avea în vedere și competențele specifice din programa școlară.

III . Conținuturi

Clasa a IX-a.

Algebră.

Geometrie și trigonometrie .

Clasa a X-a.

Algebră: Progresii. Funcții. Polinoame. Elemente de combinatorică. Medii; dispersia. Operații cu evenimente. Probabilitatea unui eveniment.

Elemente de geometrie în plan și în spațiu: Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul, operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a adunării, a scăderii numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real. Numere complexe sub formă trigonometrică; produsul; puterea (formula lui Moivre); rădăcinile de ordinul n ale unității; interpretarea geometrică a înmulțirii numerelor complexe sub formă trigonometrică; aplicații ale numerelor complexe în geometrie. Produsul scalar a doi vectori în plan și în spațiu - condiții de perpendicularitate. Determinarea distanțelor, ariilor sau volumelor folosind calculul sintetic sau vectorial.

Clasa a XI-a

Elemente de algebră liniară și geometrie analitică. (Nu se cer elemente de programare liniară).

Elemente de analiză matematică. (Nu se cer marginile unei mulțimi și diferențiala).

Clasa a XII-a

Elemente de algebră. (Nu se cer relații de echivalență, partiții și subinele).

Elemente de analiză matematică.

Notă. Conținuturile programei de bacalaureat sunt incluse în conținuturile programei școlare din curriculumul nucleu și curriculumul nucleu aprofundat al profilului. (Se cer și capitolele marcate cu steluță în programa școlară). Toate subiectele vor fi elaborate în concordanță cu programa școlară, fără a reflecta în mod special viziunea unui manual anume.

Scanned with OKEN Scanner

M1-specializările: ştiinţe ale naturii, electronică şi automatizări, electrotehnic, telecomunicaţii, mecanic, lucrări publice-construcţii, textile, pielărie

I. Statutul disciplinei

Matematica este disciplină obligatorie de examen – *proba d* şi disciplină la alegere din profilul opus – *proba f.*

II. Competenţe de evaluat

1. Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate de aplicare
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunţuri matematice
3. Utilizarea corectă a algoritmilor matematici şi a raţionamentelor în rezolvarea de probleme cu diferite grade de dificultate
4. Exprimarea şi redactarea corectă şi coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme
5. Analiza unei situaţii problematice şi determinarea ipotezelor necesare pentru obţinerea concluziei
6. Generalizarea unor proprietăţi prin modificarea contextului iniţial de definire a problemei sau prin îmbunătăţirea sau generalizarea algoritmilor

În plus, se vor avea în vedere şi competenţele specifice din programa şcolară.

III. Conţinuturi

Clasa a IX-a

Algebră.
Geometrie şi trigonometrie.

Clasa a X-a

Algebră: Progresii. Funcţii. Polinoame. Elemente de combinatorică. Medii; dispersia. Operaţii cu evenimente. Probabilitatea unui eveniment.
Elemente de geometrie în plan şi în spaţiu: Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul, operaţii cu numere complexe. Interpretarea geometrică a adunării, a scăderii numerelor complexe şi a înmulţirii acestora cu un număr real. Numere complexe sub formă trigonometrică; produsul; puterea (formula lui Moivre); rădăcinile de ordinul n ale unităţii. Produsul scalar a doi vectori în plan şi în spaţiu - condiţii de perpendicularitate. Determinarea distanţelor, ariilor sau volumelor folosind calculul sintetic sau vectorial.

Clasa a XI-a

Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică. (Nu se cer elemente de programare liniară).
Elemente de analiză matematică. (Nu se cer marginile unei mulţimi şi diferenţiala).

Clasa a XII-a

Elemente de algebră. (Nu se cer relaţii de echivalenţă, partiţii).
Elemente de analiză matematică.

Notă. Conţinuturile programei de bacalaureat sunt incluse în conţinuturile programei şcolare din curriculumul nucleu al profilului (Nu se cer capitolele marcate cu steluţă în programa şcolară). Toate subiectele vor fi elaborate în concordanţă cu programa şcolară, fără a reflecta în mod special viziunea unui manual anume.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Clasa a IX-a, M_1

Numere reale

Partea întreagă a unui număr a este cel mai mare întreg mai mic decât numărul a și se notează $[a]$. *Partea fracționară* a unui număr a este diferența dintre număr și partea sa întreagă și se notează $\{a\}$. Avem $\{a\} = a - [a]$.

Pentru $x \in \mathbb{R}$, avem: $[x] \leqslant x < [x] + 1$; $\quad x - 1 < [x] \leqslant x$; $\quad 0 \leqslant \{x\} < 1$.

***Puteri cu exponent rațional.**

Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Avem: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; $(a^r)^s = a^{rs}$; $a^0 = 1$; $1^r = 1$;

$(a \cdot b)^r = a^r b^r$; $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; $\forall a > 1$, $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$; $\forall a < 1$, $a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$.

***Proprietățile radicalilor**

Pentru a, b reale și n, k naturale impare sau a, b pozitive și n, k naturale, avem:

$\sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$; $\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a < b$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$; $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Media armonică a numerelor reale pozitive nenule $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

Media geometrică a numerelor reale pozitive $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Inegalitatea mediilor. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}_+^*$; avem

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Modulul (valoarea absolută) a numărului real a, este $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

Ecuații

Ecuația de forma $ax + b = 0$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ are soluția unică $x = -\frac{b}{a}$.

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, are:

- două soluții reale $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- o soluție reală $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
- nici o soluție reală dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;

Scanned with OKEN Scanner

Descompunerea trinomului $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *în produs*

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Relațiile lui Viète. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0, \Delta \geq 0)$. Notăm: $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 \cdot x_2$. Atunci $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Formarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ *când se cunosc soluțiile sale*

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$. Atunci x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - Sx + P = 0$.

Elemente de logică matematică

Fie propozițiile p și q. Avem următoarele tabele de adevăr pentru ...

negație

p	$\neg p$
0	1
1	0

conjuncție

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

disjuncție

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

implicație

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

echivalență

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Legea dublei negații: $\neg\neg p \leftrightarrow p$

Legea terțului exclus: propoziția $p \vee \neg p$ este adevărată.

Metoda reducerii la absurd. Fie p, q propoziții. Avem $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Mulțimi

Fie A, B mulțimi incluse într-o mulțime *de referință* (numită și *totală*) T.

Complementara mulțimii A este mulțimea notată $\overline{A}$ (sau $C_T A$, sau CA), formată din elementele lui T care nu aparțin lui A. $\overline{A} = \{x \mid x \in T, x \notin A\}$.

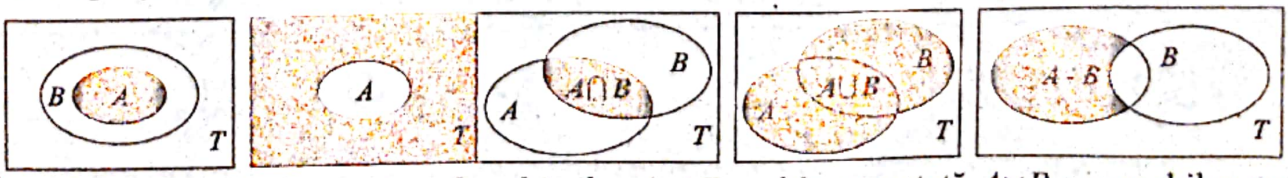
Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cap B$ formată din elementele lui T care aparțin lui A și B. $A \cap B = \{x \mid x \in T, x \in A \wedge x \in B\}$.

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cup B$ formată cu elementele lui T care aparțin sau lui A, sau lui B. $A \cup B = \{x \mid x \in T, x \in A \vee x \in B\}$.

Notăm cu $|A|$ numărul de elemente ale mulțimii A.

Fie mulțimile A și B. Atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Diferența mulțimilor A și B este mulțimea notată $A - B$, formată din elementele lui T care aparțin lui A și nu aparțin lui B. $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.



Numim *produs cartezian al mulțimilor* A *și* B mulțimea notată $A \times B$ a perechilor cu primul element din A și al doilea din B. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Produsul cartezian a n mulțimi $A_1, A_2, \ldots A_n$ este mulțimea

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Principiul inducției

Fie propozițiile $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ Dacă p_0 este adevărată și „$\forall\, k \in \mathbb{N}, p_k \to p_{k+1}$" este adevărată, atunci „$\forall\, n \in \mathbb{N}, p_n$" este propoziție adevărată.

Formule care pot fi demonstrate prin inducție

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$$

Funcții

Funcția afină

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție afină definită prin relația $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Funcția f este strict crescătoare, dacă $a > 0$ și este strict descrescătoare, dacă $a < 0$.

Funcția f este constantă, dacă $a = 0$.

Dacă $a > 0$, atunci $f < 0$ pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{a})$ și $f > 0$ pe intervalul $(-\frac{b}{a}, \infty)$.

Dacă $a < 0$, atunci $f > 0$ pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{a})$ și $f < 0$ pe intervalul $(-\frac{b}{a}, \infty)$.

O dreaptă de ecuație $y = ax + b$ separă planul în două semiplane disjuncte:

I. Semiplanul aflat deasupra dreptei d, adică $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y > ax + b\}$;

II. Semiplanul aflat sub dreapta d, adică $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y < ax + b\}$.

Funcția de gradul II

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

semnul lui a	I	semn $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$	monotonia funcției f pe intervalul I	tabelul monotoniei funcției f pe $\mathbb{R}$
+	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$	−	descrescătoare	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $f(x)$: ↘ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↗
+	$\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	+	crescătoare	
−	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$	+	crescătoare	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $f(x)$: ↗ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↘
−	$\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	−	descrescătoare	

♦ Dacă $a > 0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ este minimul funcției. Punctul $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este situat „cel mai jos" pe graficul lui f.

♦ Dacă $a < 0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ este maximul funcției. Punctul $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este situat „cel mai sus" pe graficul lui f.

Scanned with OKEN Scanner

Operații cu funcții.

Fie f, g două funcții reale definite pe același domeniu de definiție, D.

$f+g: D \to \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{f+g} f(x)+g(x)$ se numește *funcția sumă* a lui f și g;

$f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{f \cdot g} f(x) \cdot g(x)$ se numește *funcția produs* a lui f și g;

$\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$, cu $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, $x \xrightarrow{\frac{f}{g}} \frac{f(x)}{g(x)}$ se numește *funcția cât.*

Fie funcțiile $f: A \to B$ și $g: B \to C$. Funcția $g \circ f: A \to C$, definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se numește *compusa lui f cu g.*

*Fie funcția $f: A \to B$, $y = f(x)$. Funcția $g: B \to A$ cu proprietatea $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in A$ și $(f \circ g)(y) = y$, $\forall y \in B$, se numește *inversa funcției f* și se notează f^{-1}.

Paralelism și calcul vectorial

Un reper cartezian xOy în plan determină o împărțire a planului în patru *cadrane*:

$I = \{M(x,y) | x > 0, y > 0\}$ $\quad$ $II = \{M(x,y) | x < 0, y > 0\}$

$III = \{M(x,y) | x < 0, y < 0\}$ $\quad$ $IV = \{M(x,y) | x > 0, y < 0\}$.

Distanța dintre două puncte în plan

Distanța dintre punctele $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$ este $M_1M_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

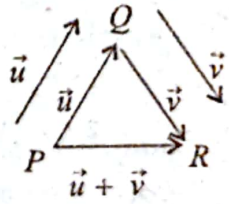
Distanța dintre două puncte în spațiu

Într-un reper ortogonal $Oxyz$ distanța dintre punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$ este:

$M_1M_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

Regula triunghiului sau *relația lui Chasles.*

Oricare ar fi trei puncte P, Q, R în plan, are loc egalitatea: $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

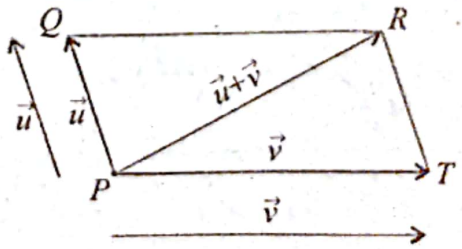


Regula paralelogramului

Fie $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, $\vec{PQ} = \vec{u}$ și $\vec{PT} = \vec{v}$.

Construim paralelogramul $PQRT$.

Atunci $\vec{u} + \vec{v} = \vec{PQ} + \vec{PT} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$



Vectori coliniari

Fie $\vec{u}$ un vector nenul și $\vec{v}$ un vector oarecare.

1) Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari, atunci există un număr real λ, unic, astfel încât $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

2) Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, atunci $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v} \in V$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Scalarii α și β cu această proprietate sunt unici.

Ecuația unei drepte în plan

Ecuația dreptei care trece prin punctul $M(x_M, y_M)$ și are vectorul director $\vec{u}(\alpha, \beta)$ este: $y - y_M = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_M)$.

Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ este: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$.

Dreptele distincte $y = mx + n$ și $y = m'x + n'$ sunt paralele dacă și numai dacă $m = m'$ și sunt perpendiculare dacă și numai dacă $mm' = -1$.

Elemente de trigonometrie.

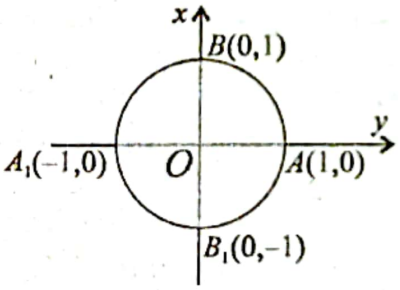
Relația între măsura în radiani, t și măsura în grade a unghiurilor, α, este $\frac{t}{\pi} = \frac{\alpha}{180}$.

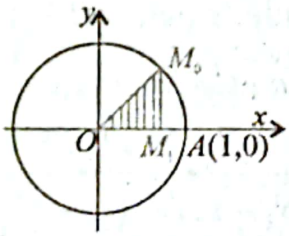
Într-un cerc de rază R, fie t măsura în radiani a arcului de cerc AB și l lungimea arcului de cerc AB. Atunci $l = t \cdot R$.

Într-un cerc trigonometric $\mathscr{C}$ de centru O, fie $A(1, 0) \in \mathscr{C}$. Unui număr real t i se asociază un punct $M(\cos t, \sin t) \in \mathscr{C}$, care are măsura arcului orientat $\widehat{AM}$ egală cu t.

Avem: $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ $\quad -1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

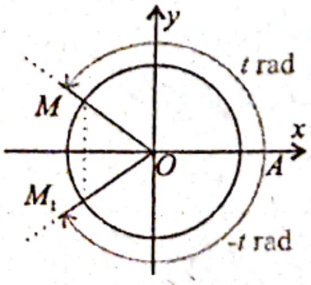
$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (*identitatea fundamentală a trigonometriei*)

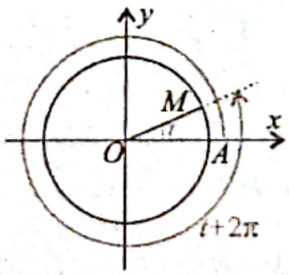


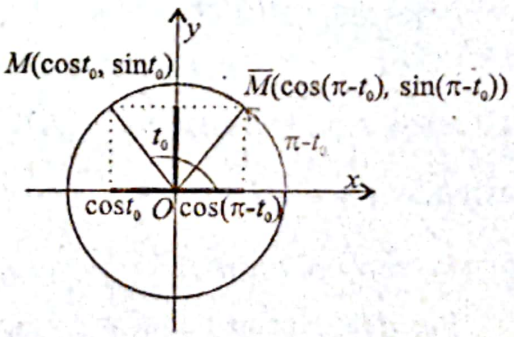


$\sin(-t) = -\sin t$ $\quad \cos(t + 2k\pi) = \cos t$, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$. $\quad \cos t_0 = -\cos(\pi - t_0)$

$\cos(-t) = \cos t$ $\quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t$, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$. $\quad \sin t_0 = \sin(\pi - t_0)$







Pentru $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$.

$\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$

Scanned with OKEN Scanner

Formule trigonometrice

$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$ $\qquad \sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$; $\quad \sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$; $\quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $\quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$; $\quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$; $\quad *\sin a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$; $\quad *\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

$*\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$; $\quad *\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$;

$*\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$; $\quad *\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$.

♦ Funcțiile sinus și cosinus sunt periodice cu perioada principală $T = 2\pi$.
Tangenta este o funcție periodică cu perioada principală $T = \pi$.

Ecuații trigonometrice

Ecuația $\sin t = a$ are soluții dacă $a \in [-1, 1]$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{\arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Ecuația $\cos t = a$ are soluții dacă și numai dacă $a \in [-1, 1]$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{\arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Ecuația $\operatorname{tg} t = m$ are soluții, oricare ar fi m un număr real. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{\operatorname{arctg} m + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Relații metrice în plan și în spațiu

Fie ΔABC cu laturile a, b, c și h_a înălțimea coborâtă din vârful A pe latura opusă a.

Teorema sinusurilor. Fie R raza cercului circumscris ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Teorema cosinusului. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Formula lui Heron. Notăm $p = \frac{a+b+c}{2}$. Aria ΔABC este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Aria ΔABC este $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \frac{abc}{4R} = rp$, unde r este raza cercului înscris.

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a, M_1
Progresii

Progresii aritmetice

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte progresie aritmetică de raţie r şi se notează $\div(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_{n+1}=a_n+r,\ \forall n\geq 1$

Fie $\div(a_n)$ de raţie r. Avem:

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\ \forall n\geq 2$

$a_n=a_1+(n-1)r,\ \forall n\geq 1$

$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=$

$=\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$

Progresii geometrice

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte progresie geometrică de raţie $q\neq 0$ şi se notează $\div(b_n)_{n\geq 1}$ dacă $b_{n+1}=b_n\cdot q,\ \forall n\geq 1$

Fie $\div(b_n)$ de raţie q. Avem:

$b_n^2=b_{n-1}b_{n+1},\ \forall n\geq 2$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1},\ \forall n\geq 1$

$S_n=b_1+b_2+...+b_n=\begin{cases}nb_1, & \text{dacă } q=1\\ b_1\frac{(q^n-1)}{q-1}, & \text{dacă } q\neq 1\end{cases}$

Funcţii

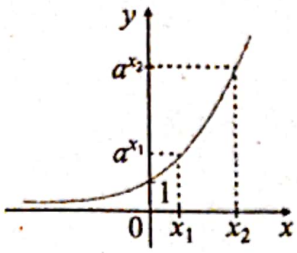
Fie mulţimile reale A şi B şi o funcţie $f:A\to B$.

- f se numeşte *crescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2\in A$, din $x_1<x_2$ rezultă $f(x_1)\leq f(x_2)$.
- f se numeşte *strict crescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2\in A$, din $x_1<x_2$ rezultă $f(x_1)<f(x_2)$.
- f se numeşte *descrescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2\in A$, din $x_1<x_2$ rezultă $f(x_1)\geq f(x_2)$.
- f se numeşte *strict descrescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2\in A$, din $x_1<x_2$ rezultă $f(x_1)>f(x_2)$.
- f este crescătoare dacă şi numai dacă, pentru orice $x_1\neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq 0$
- f este strict crescătoare dacă şi numai dacă, $\forall\ x_1\neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$
- f este descrescătoare dacă şi numai dacă, $\forall\ x_1\neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq 0$
- f este strict descrescătoare dacă şi numai dacă, $\forall\ x_1\neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$
- O funcţie $f:A\to B$ este *injectivă* dacă îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente:
  a) $\forall x_1, x_2\in A,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.
  b) $\forall y\in B$, există cel mult un element $x\in A$, astfel încât $y=f(x)$.
- O funcţie $f:A\to B$ se numeşte *surjectivă* dacă $\forall y\in B, \exists x\in A$ astfel încât $y=f(x)$.
- O funcţie $f:A\to B$ se numeşte bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă.
- Funcţia $f:A\to B$ este *inversabilă* dacă există funcţia $g:B\to A$ cu $g\circ f=1_A$ şi $f\circ g=1_B$.
- O funcţie $f:A\to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.
- Dacă $f:A\to B$ este o funcţie numerică inversabilă, graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice faţă de prima bisectoare ($y=x$).

Scanned with OKEN Scanner

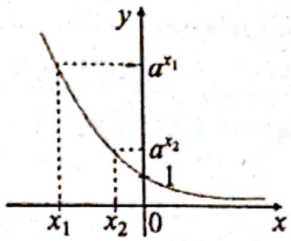
Funcția exponențială este funcția $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$; a se numește bază; a^x se numește putere.

♦ Pentru $a > 1$ graficul funcției exponențiale are forma:



♦ Pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$.

Pentru $0 < a < 1$ graficul funcției exponențiale are forma:



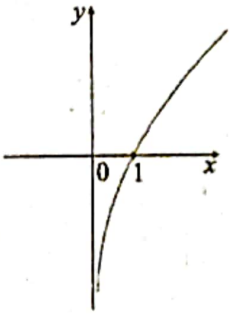
♦ Pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.

♦ Graficul funcției exponențiale trece prin punctul $(0, 1)$, adică $a^0 = 1$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$.

♦ Funcția exponențială este bijectivă, deci e inversabilă. Inversa ei este ...

Funcția logaritmică : $x \mapsto \log_a x$, $x \in (0, \infty)$, a se numește bază. $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

♦ Pentru $a > 1$ graficul funcției logaritmice are forma:



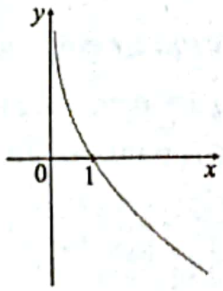
Funcția logaritmică este strict crescătoare:

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	|	$-$	0	$+$	

;

Pentru $0 < a < 1$ graficul funcției logaritmice are forma:



Funcția logaritmică este strict descrescătoare:

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	|	$+$	0	$-$	

♦ Graficul funcției logaritmice trece prin punctul $(1, 0)$, adică $\log_a 1 = 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$.

♦ $\log_a x = z \Leftrightarrow x = a^z$ $\forall a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0, \infty)$ și $z \in \mathbb{R}$.

♦ Dacă $a, b \in (0, +\infty) - \{1\}$, $x, y \in (0, +\infty)$ și $z \in \mathbb{R}$, atunci: $a^{\log_a x} = x$; $\log_a a^z = z$;

$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a b^z = z \cdot \log_a b$; $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Scanned with OKEN Scanner

Numere complexe

Un număr complex este de forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $i^2 = -1$; $\text{Re}(z) = a$; $\text{Im}(z) = b$.

Operații cu numere complexe.

Fie $z_1 = a_1 + ib_1$ și $z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$; $\qquad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$; $\qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} - i\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}$.

Numere complexe conjugate

$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$ se numește conjugatul numărului complex $z = a + ib$.

Avem: a) $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $ib = \frac{z - \bar{z}}{2}$; b) $z \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\bar{z} = z$;

c) z este imaginar dacă și numai dacă $\bar{z} = -z$; d) $\overline{\alpha z} = \alpha \cdot \bar{z}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Fie $z = a + ib$ și $z' = a' + ib'$ două numere complexe. Avem:

a) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; b) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$; c) $\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{a'^2 + b'^2}$, $z' \neq 0$.

Modulul unui număr complex

Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Oricare ar fi numărul complex $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ avem:

1) $|z| \geq 0$ **2)** $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ **3)** $z \cdot \bar{z} = |z|$ **4)** $|z| = |\bar{z}|$.

Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci: **5)** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **6)** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

7) *Inegalitatea triunghiului* $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Forma trigonometrică a unui număr complex

Fie $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + ib$. Există și sunt unice $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $\varphi \in [0, 2\pi)$ astfel încât $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$.

Fie $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ și $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ $\qquad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1}[\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)]$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$ $\qquad z_1^n = \rho_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Formula lui Moivre: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

Ecuația cercului de centru $M_0(z_0)$ și rază $r>0$ este $|z-z_0|=r$

Fie punctele $M_1(z_1)$ și $M_2(z_2)$. Avem $m(\sphericalangle M_2OM_1)=\arg\frac{z_2}{z_1}$.

Fie punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$. Atunci $m(\sphericalangle M_3M_1M_2)=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

Fiind date punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$, dreptele M_1M_2 și M_3M_4 sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ este imaginar, adică $\operatorname{Re}\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=0$.

Punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ sunt conciclice dacă și numai dacă $\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-\arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\in\{0,\pi\}$.

Două triunghiuri $A_1A_2A_3$ și $A_1'A_2'A_3'$ cu vârfurile de afixe z_k, respectiv z_k', $1\leqslant k\leqslant 3$, sunt asemenea dacă și numai dacă: $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'}$.

Elemente de geometrie în plan și în spațiu

În reperul $Oxyz$, fiecare punct din spațiu $M(x,y,z)$ este determinat de *vectorul de poziție* $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$; *abscisa* x, *ordonata* y și *cota* z sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ (sau ale punctului M) în baza $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Norma unui vector este distanța dintre extremitățile sale.

Pentru orice doi vectori nenuli $v_1, v_2\in\mathcal{V}_3$, numărul real $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=\left|\vec{v_1}\right|\cdot\left|\vec{v_2}\right|\cdot\cos\alpha$, unde $\alpha=m(\sphericalangle(\vec{v_1},\vec{v_2}))$ se numește *produsul scalar al vectorilor* $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$. Dacă $\vec{v_1}$ sau $\vec{v_2}$ este nul, atunci prin definiție produsul scalar $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}$ este nul.

Proprietățiile produsului scalar

Fie $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V}_3$. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot\operatorname{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ ($\operatorname{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ este proiecția scalară a lui $\vec{v}$ pe $\vec{u}$); $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$; $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $(\alpha\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(\alpha\cdot\vec{v})$.

Dacă $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ și $\vec{v}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}$, atunci $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1$.

Produsul scalar $\vec{u}\vec{v}$ este nul dacă și numai dacă $\vec{u}\perp\vec{v}$ sau $\vec{u}=\vec{0}$ sau $\vec{v}=\vec{0}$.

Fie $\vec{u}=(x,y,z)$ și $\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)$ vectori, punctele $M(x,y,z)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și fie α unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Atunci $\cos\alpha=\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{\left|\vec{v_1}\right|\cdot\left|\vec{v_2}\right|}=\frac{x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$.

Într-un sistem de coordonate carteziene, un plan $\mathcal{P}$ este definit de o ecuație de gradul întâi în x,y,z, adică $Ax+By+Cz+D=0$, unde cel puțin unul dintre coeficienții reali A, B, C este nenul. Avem $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\mid Ax+By+Cz+D=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

Fie $\vec{v}$ vectorul de poziție al punctului $M(a,b,c)$. Vectorul $\vec{v}$ face cu axele *unghiurile*

Scanned with OKEN Scanner

directoare α, β, γ, cu $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Dacă $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinusurile directoare ale dreptei d și $p \geq 0$, atunci $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$ este *ecuația normală a planului* perpendicular pe dreapta d, situat la distanța p de origine.

Distanța de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la un plan este:

1) $d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$, dacă ecuația planului este dată sub forma normală.

2) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, dacă ecuația planului este dată sub forma generală.

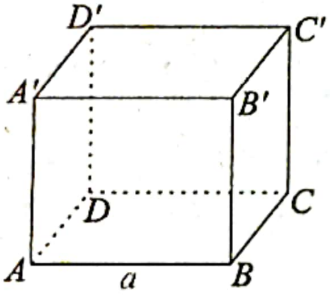
Ariile și volumele principalelor poliedre.

Cubul

$A_l = 4a^2$

$A_t = 6a^2$

$V = a^3$

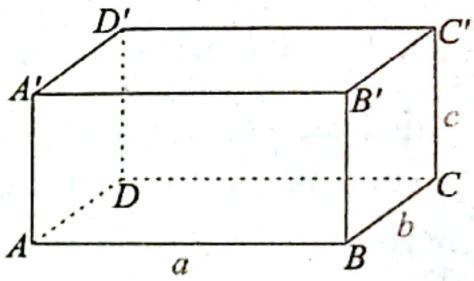


Paralelipipedul dreptunghic

$A_l = 2(ac + bc)$

$A_t = 2(ab + bc + ca)$

$V = abc$



Paralelipipedul oarecare

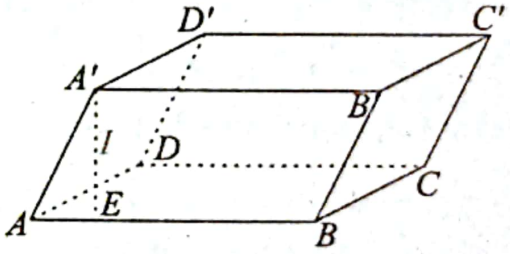
$A'E = I$ = înălțime

$A_{ABCD} = A$

A_l = suma ariilor fețelor laterale

$A_t = A_l + 2A$

$V = A \cdot I$

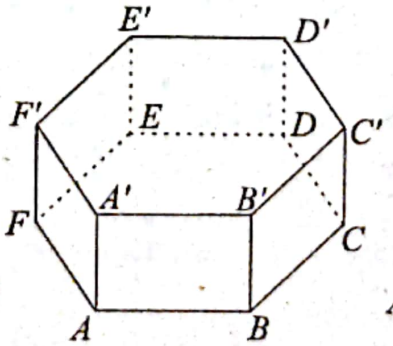


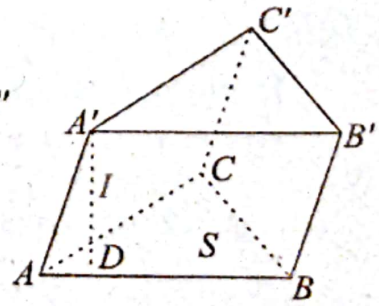
Prisma dreaptă sau oblică

A_l = suma arilor fețelor laterale

$A_t = A_l + 2A$

$V = A \cdot I$, unde A reprezintă aria suprafeței bazei și I înălțimea prismei.



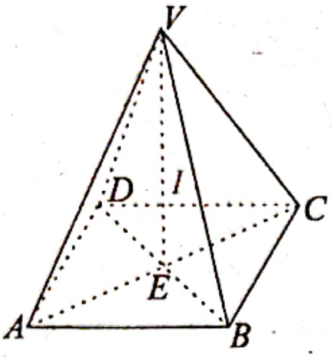


Piramida

A_l = suma ariilor fețelor laterale

$A_t = A_l + A$

$V = \frac{1}{3} A \cdot I$

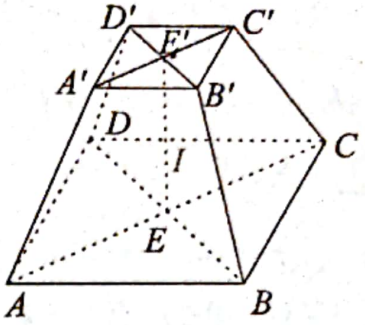


Trunchiul de piramidă

A_l = suma ariilor fețelor laterale

$A_t = A_l + A_b + A_B$

$V = \frac{I}{3}\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right)$



Corpuri rotunde.

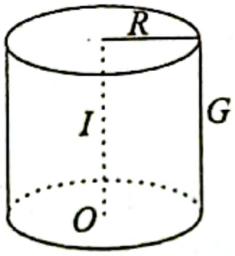
Ariile și volumele principalelor corpuri rotunde

Cilindrul circular drept

$A_l = 2\pi RG$

$A_t = 2\pi R \cdot (G + R)$

$V = \pi R^2 \cdot I$

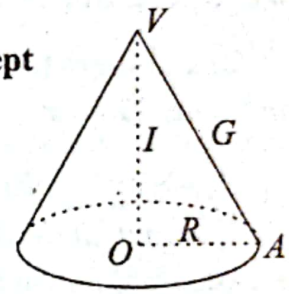


Conul circular drept

$A_l = \pi RG$

$A_t = \pi R(G + R)$

$V = \frac{\pi R^2 I}{3}$

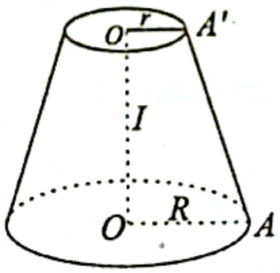


Trunchiul de con

$A_l = \pi G(R + r)$

$A_t = A_l + \pi(R^2 + r^2)$

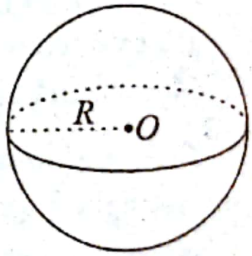
$V = \frac{\pi \cdot I}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$



Sfera

$A = 4\pi R^2$

$V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$



Polinoame

Forma canonică a polinomului cu coeficienți complecși (respectiv reali) este $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ \ldots \ + a_0$, cu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ (respectiv $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$) și $a_n \neq 0$.

Prescurtat scriem $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Dacă polinomul $f = 0$, spunem că gradul polinomului f este $-\infty$, iar dacă $f = a_n X^n + \ldots + a_0$, cu $a_n \neq 0$ spunem că polinomul f are grad n.

1) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $z \in \mathbb{C}$. Atunci $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

2) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $b > 0$.

Atunci $f(a \pm \sqrt{b})$ este de forma $A \pm B\sqrt{b}$, $A, B \in \mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

Operații cu polinoame

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ și $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, $m < n$.

Suma polinoamelor f și g este polinomul pe care îl notăm $f + g$ definit prin:

$$f + g = g + f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k, \text{ unde } c_k = \begin{cases} a_k + b_k, & k \leq m \\ b_k, & m < k \leq n \end{cases}.$$

Produsul polinoamelor f *și* g este polinomul $f \cdot g = g \cdot f = c_{n+m} X^{n+m} + \ldots + c_0$, unde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, $k = \overline{0, n+m}$.

Fie f și g polinoame. Atunci $\text{grad}(fg) = \text{grad} f + \text{grad} g$.

Oricare ar fi polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $g \neq 0$, există și sunt unice polinoamele $c, r \in \mathbb{C}[X]$ care au proprietățile: **(1)** $f = g \cdot c + r$; **(2)** grad $r <$ grad g.

*Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$. *Polinomul f este divizibil prin polinomul g* dacă există un polinom $h \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = gh$. Notăm $f \vdots g$ sau $g \mid f$.

Restul împărțirii unui polinom f prin binomul $X - a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului în a.

Rădăcinile polinoamelor

Teorema lui Bézout. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom nenul și $a \in \mathbb{C}$. Atunci a este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $X - a$ divide f.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $f = 2$, $f = aX^2 + bX + c$. Atunci:

a) f este reductibil peste $\mathbb{C}$

b) f este reductibil peste $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Teorema fundamentală a algebrei (*Teorema D'Alembert-Gauss*). Orice ecuație polinomială de grad mai mare sau egal cu 1 are cel puțin o rădăcină complexă.

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$. Dacă grad $f = n$, atunci f are exact n rădăcini complexe (nu neapărat distincte).

Fie $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, $n \geq 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Avem $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ și descompunerea lui f în factori de gradul întâi este unică.

Relațiile lui Viète. Fie $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Avem $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$; $x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$; $\ldots$; $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $S_1 = \alpha_1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;

$S_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \ldots + \alpha_1 \alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_n$; $\ldots$ $S_n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Atunci $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sunt soluțiile ecuației $x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^k S_k x^{n-k} + \ldots + (-1)^n S_n = 0$.

Spunem că $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcină multiplă de ordin p pentru polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă $(X - \alpha)^p$ divide pe f și $(X - \alpha)^{p+1}$ nu divide pe f.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom nenul cu coeficienți reali și α o rădăcină a lui f.

1) $\overline{\alpha}$ este de asemenea o rădăcină a lui f.

2) α și $\overline{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate.

Orice polinom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de grad $n \geq 1$ cu coeficienți reali poate fi descompus într-un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali.

Fie f un polinom nenul cu coeficienți raționali și $a + b\sqrt{d}$ $(a, b, d \in \mathbb{Q},\ d > 0,\ \sqrt{d} \notin \mathbb{Q})$ o rădăcină a lui f. Atunci:

1) $a - b\sqrt{d}$ este de asemenea rădăcină a lui f.

2) $a + b\sqrt{d}$ și $a - b\sqrt{d}$ au același ordin de multiplicitate.

Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom de gradul $n \geq 1$ cu coeficienți întregi iar $\alpha = \frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f, p și $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Atunci:

1) p divide termenul liber a_0

2) q divide coeficientul dominant a_n.

Elemente de combinatorică

Fie n și p două numere naturale nenule. Numărul de șiruri cu p elemente aparținând unei mulțimi cu n elemente este n^p.

Fie E și F două mulțimi nevide. Dacă Card $E = p$ și Card $F = n$, atunci numărul funcțiilor definite pe E cu valori în mulțimea F este n^p.

♦ Prin convenție, $0! = 1$; ♦ Notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $n \geq 1$.

Fie E o mulțime nevidă cu n elemente.

1. Există n^p șiruri cu p elemente din mulțimea E.

2. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte p, $0 \leq p \leq n$, este A_n^p, unde:

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ sau $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

3. Numărul permutărilor de n elemente este $P_n = n!$

4. Combinări de n elemente luate câte p, $0 \leq p \leq n$, este $C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

♦ Formula combinărilor complementare: $C_n^p = C_n^{n-p}$

♦ Formula de descompunere a combinărilor: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Binomul lui Newton

Fie numerele reale a și b și numărul natural nenul n. Avem:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k.$$

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 - C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + (-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^nC_n^nb^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Termenul de rang k din binomiul lui Newton este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$

(Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n);

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$; $\quad C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}$

Inegalitatea lui Bernoulli, $b^n > 1 + n(b-1)$.

Statistică și probabilități

Considerăm un lot de numere $x_1, x_2, ..., x_n$.

Media acestui lot este $M = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Dispersia lotului este $D = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + ... + (x_n - M)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}$.

Proprietăți ale probabilității

Fie U o mulțime (numită univers) și $\mathscr{E}$ părțile mulțimii U. Elementele lui $\mathscr{E}$ se numesc evenimente. Fie P o funcție definită pe $\mathscr{E}$ cu valori în [0, 1]. Tripletul $(U, \mathscr{E}, P)$ este un câmp de probabilitate dacă, $\forall A, B$ evenimente din $\mathscr{E}$, avem:

1) $P(\varnothing) = 0$;

2) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

4) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Fie $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un univers finit și P o probabilitate pe $\mathscr{E} = \mathscr{P}(U)$.

Notăm $P_i = P(\{x_i\})$, $i = 1, 2, ..., n$. Atunci:

1) Suma probabilităților evenimentelor elementare este:

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = 1 = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) = \sum_{x=U} P(\{x\}).$$

2) Probabilitatea oricărui eveniment este suma probabilităților evenimentelor elementare pe care le include, adică $P(A) = \sum_{x \in A}(P\{x\})$, $A \subset U$.

Într-un câmp de evenimente egal probabile (U, P), $\forall A \in \mathscr{E}$ avem $P(A) = \frac{[A]}{[U]}$

$$P(A) = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile evenimentului}}{\text{nr. total de cazuri}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a, M_1
Elemente de algebră liniară

Transpusa unei matrice $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ cu m linii și n coloane este o matrice notată $'A=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ cu n linii și m coloane, unde $b_{ij}=a_{ji}$, $\forall i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$

Determinantul matricei de ordin 2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, este $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Determinantul matricei de ordin 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ este numărul

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Regula minorilor. (Dezvoltarea determinantului după o linie sau coloană).

Alegem o linie sau o coloană și înmulțim fiecare element a_{ij} al acestei linii sau coloane cu determinantul de ordin inferior obținut prin eliminarea liniei i și a coloanei j și cu $(-1)^{i+j}$; adunăm produsele astfel obținute și obținem valoarea determinantului.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\ldots$$

Proprietățile determinanților

I. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.

II. O matrice care are o linie (sau o coloană) cu toate elementele 0, are determinantul 0.

III. Dacă înmulțim toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice cu un număr, valoarea determinantului matricei se înmulțește cu acel număr.

IV. Dacă într-o matrice adunăm toate elementele unei linii (respectiv coloane) cu elementele corespunzătoare unei alte linii (respectiv coloane) înmulțite cu un număr, valoarea determinantului nu se schimbă.

V. Dacă o matrice are două linii (respectiv coloane) proporționale, atunci determinantul este nul.

VI. Dacă schimbăm între ele două linii (sau două coloane) dintr-o matrice pătratice, atunci valoarea determinantului se înmulțește cu -1.

Scanned with OKEN Scanner

VII. Dacă matricele A și B diferă printr-o singură linie i, atunci determinantul matricei care are pe linia i suma celor două linii i din matricele A și B este egal cu suma $\det A + \det B$. Avem un enunț similar pentru coloane.

VIII. Determinantul produsului a două matrice pătratice de același ordin este egal cu produsul determinanților acestor matrice.

IX. Dacă o linie (respectiv coloană) a determinantului unei matrice este o combinație liniară a celorlalte linii (respectiv coloane) ale aceluiași determinant, atunci determinantul este nul.

Valoarea Δ a determinantului matricei asociate unui sistem determină compatibilitatea sistemului (existența soluțiilor): dacă $\Delta \neq 0$, sistemul este *compatibil determinat* (are o soluție unică); dacă $\Delta = 0$, atunci sistemul poate fi *incompatibil* (nu are soluții) sau *compatibil nedeterminat* (are o infinitate de soluții).

Metoda lui Cramer.

Fie $\mathcal{S}$ un sistem liniar cu necunoscutele x_i și Δ determinantul său. Presupunem $\Delta \neq 0$. Notăm cu Δ_{x_i} determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei x_i cu coloana termenilor liberi.

Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$ și $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$.

Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ și $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$.

Soluția sistemului $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$ este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, $x_4 = \dfrac{\Delta_{x_4}}{\Delta}$.

Un sistem liniar omogen are toți determinanții Δ_{x_i} nuli; deci admite întotdeauna cel puțin soluția nulă $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Acest sistem admite și soluții nenule dacă $\Delta = 0$.

♦ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică de ordinul n cu coeficienți în $\mathbb{C}$. Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$. Matricea inversă a matricei A este $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$, unde A^* se obține înlocuind fiecare element al matricei transpuse ${}^tA$ cu complementul său algebric $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, unde d_{ij} este minorul elementului a_{ij} din ${}^tA$ (determinantul obținut din ${}^tA$ prin eliminarea liniei i și a coloanei j).

Scanned with OKEN Scanner

Ecuații matriceale

Sistemul liniar poate fi exprimat matriceal astfel: $AX = B$, unde A este matricea coeficienților necunoscutelor, X este matricea necunoscutelor (matrice coloană) și B este matricea termenilor liberi (matrice coloană). Dacă matricea A este inversabilă avem $X = A^{-1}B$.

Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ nu este nulă, există un număr natural $r \leqslant \min\{m, n\}$ astfel încât cel puțin un minor de ordinul r (format la intersecția a r linii și r coloane din matrice) este nenul, iar toți determinanții de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Acest număr r se numește *rangul matricei*.

Rangul unei matrice rămâne neschimbat, dacă:

- multiplul unei linii (coloane) se adună la o altă linie (coloană);
- liniile (coloanele) se schimbă între ele.

Teorema Kronecker-Capelli. Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, formată din matricea sistemului la care se adaugă coloana termenilor liberi.

Teorema lui Rouché. Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli. Determinanții caracteristici se obțin adăugând o linie și o coloană din matricea extinsă unui minor cu determinantul nenul.

Elemente de geometrie analitică

Distanța dintre punctele $M_1(x_1, y_1)$ *și* $M_2(x_2, y_2)$ este $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Distanța dintre punctele din spațiu $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *și* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ este

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Ecuațiile dreptei în plan

Ecuația generală a dreptei este $Ax + By + C = 0$, $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ sau $B \neq 0$.

Ecuația dreptei de pantă m care trece prin punctul (x_0, y_0) este $y - y_0 = m(x - x_0)$, $m \in \mathbb{R}$.

Ecuația dreptei care trece prin două puncte diferite $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ este

$d: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și poate fi scrisă sub forma $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, dacă $y_1 \neq y_0$, $x_1 \neq x_0$.

Fie dreptele $d: Ax + By + C = 0$ și $d': A'x + B'y + C' = 0$.

Dacă $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, atunci d și d' sunt concurente; dacă $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, atunci $d = d'$ (A și A', B și B' sau C și C' pot fi simultan nule); dacă $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, atunci $d \parallel d'$.

Distanța de la punctul $M(x_0, y_0)$ la dreapta $d: Ax + By + C = 0$ este $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile planului

Ecuația generală a planului în spațiul tridimensional este $Ax + By + Cz + D = 0$, unde A, B, C nu sunt toate nule. Vectorul de poziție cu coordonatele (A, B, C) este perpendicular pe planul $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ecuația planului care trece prin punctul (x_0, y_0, z_0) este $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ecuația planului care trece prin 3 puncte necoliniare (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) este $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Condiția de necoliniaritate a trei puncte de coordonate (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) este $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Două plane $p: Ax + By + Cz + D = 0$ și $p': A'x + B'y + C'z + D' = 0$ cu $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ sau $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ sau $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ se intersectează după o dreaptă.

Ecuațiile dreptei în spațiu.

Ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și vectorul director $\vec{v}(l, m, n)$ sunt $d: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l \\ y = y_0 + \lambda \cdot m \\ z = z_0 + \lambda \cdot n \end{cases}$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dreapta determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și de vectorul director $\vec{v}(l, m, n)$ poate fi descrisă prin *ecuațiile canonice*: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$.

Fie punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ale dreptei d. Atunci ecuațiile canonice ale dreptei d: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$.

Fie dreptele d_1 și d_2 date prin ecuațiile canonice $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ și, respectiv, $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$. Unghiul φ format de dreptele d_1 și d_2 este dat de formula:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\pm\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Poziția relativă a unei drepte față de un plan

Fie d: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ și $\mathscr{P}$: $Ax+By+Cz+D=0$.

1) Dacă $Al+Bm+Cn\neq 0$, d intersectează planul într-un punct.
2) Dacă $Al+Bm+Cn=0$ și $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, atunci $d\parallel\mathscr{P}$.
3) Dacă $Al+Bm+Cn=0$ și $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, atunci $d\subset\mathscr{P}$.

Unghiul format de o dreaptă cu un plan

Fie dreapta d dată de ecuațiile: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ și planul $\mathscr{P}$ dat de ecuația $Ax+By+Cz+D=0$. Fie φ unghiul dintre dreapta d și planul $\mathscr{P}$.

Avem $\sin\varphi=\frac{|A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Distanța de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ *la un plan* este:

$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, dacă ecuația planului este $Ax+By+Cz+D=0$.

Planele de ecuații: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ și $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ au cosinusul unghiului dat de formula: $\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Planele $\mathscr{P}_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ și $\mathscr{P}_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ sunt paralele dacă $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ (A_1 și A_2, B_1 și B_2, respectiv C_1 și C_2 pot fi simultan nule).

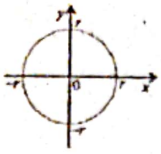
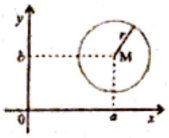
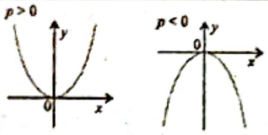
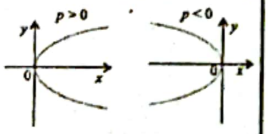
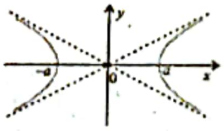
Aria triunghiului cu vârfurile în $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ este:

$$A_{[M_1M_2M_3]}=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}\text{, cu }\Delta_1=\begin{vmatrix}y_1 & z_1 & 1\\ y_2 & z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}x_1 & z_1 & 1\\ x_2 & z_2 & 1\\ x_3 & z_3 & 1\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

**Volumul tetraedrului* cu vârfurile $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ este $V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0 & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}\right|$ ($\frac{1}{6}$ din modulul determinantului).

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăți geometrice ale conicelor

conica	ecuația (implicită)	ecuațiile parametrice
cerc cu centrul în originea axelor și cu raza r, $r>0$ 	$x^2+y^2=r^2,\ r>0$	
cerc cu centrul în punctul $M(a, b)$ și cu raza r, $r>0$ 	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\ r>0$	$\begin{cases} x=r\cos\alpha+a \\ y=r\sin\alpha+b \end{cases}$
elipsa	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a, b>0$	$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases},\ t\in[0,2\pi)$
parabola cu axa de simetrie Oy 	$x^2=2py,\ p\neq 0$	
parabola cu axa de simetrie Ox 	$y^2=2px,\ p\neq 0$	$\begin{cases} x=\frac{t^2}{2p} \\ y=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$
hiperbola 	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a, b>0$	

Pentru a studia poziția unei drepte față de o conică, rezolvăm sistemul format din ecuația dreptei și ecuația conicei, ceea ce, prin substituție, este echivalent cu rezolvarea unei ecuații de grad mai mic sau egal cu 2.

Pentru a determina eventualele puncte de intersecție ale unei conice cu o altă conică, rezolvăm sistemul format din ecuațiile celor două conice.

***Ecuația tangentei la curbă** în punctul* $M(x_0, y_0)$ este $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, cu $y_0=f(x_0)$:

Ecuația tangentei la cerc în punctul $M(x_0, y_0)\in\mathscr{C}$ este $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$ (se obține din ecuația cercului prin dedublare).

Ecuația tangentei la elipsă (respectiv *hiperbolă*) *în punctul* $M(x_0, y_0)$ este $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ $\left(\text{respectiv } \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1\right)$ (se obține din ecuația elipsei (sau hiperbolei) prin dedublare).

Ecuația tangentei la parabolă în punctul $M(x_0, y_0)\in\mathscr{P}$ este $yy_0=p(x+x_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Șiruri de numere reale

Fie un șir numeric $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *majorat*, sau *mărginit superior*, dacă există un număr a cu $u_n \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *minorat*, sau *mărginit inferior*, dacă există un număr b cu $u_n \geq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *mărginit* dacă există un număr M, M > 0, cu $|u_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirurile care nu sunt mărginite se numesc *nemărginite*.

Spunem că șirul $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *tinde la* l (sau $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *converge la* l) și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ (sau $\lim a_n = l$ sau $a_n \to l$), dacă este adevărată oricare dintre următoarele propoziții:

1) Orice vecinătate a lui l conține toți termenii șirului exceptând eventual un număr finit;

2) $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_V \Rightarrow a_n \in V)$;

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)$.

Spunem că șirul $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *tinde* la ∞ și scriem $\lim a_n = \infty$, dacă este adevărată oricare dintre următoarele propoziții echivalente:

1) Orice vecinătate a lui ∞ conține toți termenii șirului, exceptând eventual un număr finit;

2) $\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_V \Rightarrow a_n \in V)$;

3) $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_M \Rightarrow a_n > M)$.

Faptul că șirul $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *tinde* la ∞ se mai notează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \to \infty$ sau $a_n \xrightarrow{n} \infty$.

Se numește *șir convergent* un șir care are limita finită.

Șirurile care nu sunt convergente se numesc *divergente*.

Un șir convergent este mărginit.

***Criteriul minorării la** ∞. Dacă șirul $(x_n)_n$ este minorat prin șirul $(u_n)_n$ care tinde la ∞, atunci șirul $(x_n)_n$ tinde la ∞. Altfel spus, dacă $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

***Criteriul majorării la** $-\infty$. Dacă șirul $(x_n)_n$ este majorat prin șirul $(u_n)_n$ care tinde la $-\infty$, atunci șirul $(x_n)_n$ tinde la $-\infty$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$ și $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la numărul real l dacă șirul $(v_n = u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către 0.

Criteriul majorării pentru șiruri convergente la 0

Fie șirurile $(x_n)_n$ și $(a_n)_n$. Dacă $|x_n| \leq |a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Fie $(u_n)_n$ un șir convergent la zero și $(a_n)_n$ un șir mărginit. Atunci $(a_n u_n)_n$ converge la zero.

Teorema de convergență a șirurilor monotone (Weierstrass)

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

***Criteriul majorării.** Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale, $x \in \mathbb{R}$ și $(a_n)_n$ un șir de termeni pozitivi. Dacă $|x_n - x| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $(x_n)_n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

***Criteriul cleștelui.** Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(x_n)_n$ șiruri de numere reale. Dacă $(x_n)_n$ este majorat de $(b_n)_n$ și minorat de $(a_n)_n$ și dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Operații cu șiruri

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri cu limită (finită sau infinită).

♦ *Limita sumei este egală cu suma limitelor*: dacă suma limitelor are sens, atunci $(a_n + b_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Caz exceptat*: $\infty - \infty$.

♦ *Constanta iese în fața limitei*: dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

♦ *Limita produsului este egală cu produsul limitelor*: dacă produsul limitelor are sens, atunci $(a_n b_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Caz exceptat*: $0 \cdot \infty$.

♦ *Limita câtului este egală cu câtul limitelor*: dacă șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are sens și dacă raportul limitelor are sens, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$. *Cazuri exceptate*: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{\infty}$; $\frac{\infty}{-\infty}$

♦ Fie $(x_n)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ și $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \begin{cases} a^x, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \\ \infty, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a > 1 \text{ sau dacă } x = -\infty \text{ și } a \in (0, 1). \\ 0, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a \in (0, 1) \text{ sau dacă } x = -\infty \text{ și } a > 1 \end{cases}$$

♦ Dacă $(x_n)_n$ este un șir de numere strict pozitive cu limita x și $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \begin{cases} \log_a x, \text{ dacă } x \in (0, \infty) \\ \infty, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a > 1 \text{ sau dacă } x = 0 \text{ și } a \in (0, 1) \\ -\infty, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a \in (0, 1) \text{ sau dacă } x = 0 \text{ și } a > 1 \end{cases}$$

***Criteriul raportului.** Fie $(a_n)_n$ șir de numere strict pozitive. Presupunem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 2) Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Limite importante.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0\right) = \begin{cases} \infty, a_k > 0 \\ -\infty, a_k < 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & -1 < a < 1 \\ \text{nu există}, & a \leq -1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0}{b_l n^l+b_{l-1}n^{l-1}+\ldots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\frac{a_k}{b_l}, & k=l\\ 0, & k<l\\ \infty\cdot\frac{a_k}{b_l}, & k>l\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}n^\alpha=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } \alpha>0\\ 1, \text{ dacă } \alpha=0\\ 0, \text{ dacă } \alpha<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a,\ a>0,\ a\neq 1;$

$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\geq 1$ este convergent. Limita sa, notată cu e, aparține intervalului $(2, 3)$.

Dacă $(a_n)_n$ este un șir cu $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

Dacă $(a_n)_n$ este un șir nenul cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$.

Dacă $(u_n)_n$ converge la zero, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{u_n}-1}{u_n}=\ln a$.

Nedeterminări înlăturate: $\frac{0}{0}$ sau $0\cdot\infty$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ și $a_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n}=1$.

Limite de funcții

Limita unei funcții într-un punct

- **Criterii ε – δ.** Fie $f: D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$.

În cazul $a\in\mathbb{R}$ și $l=\infty$, funcția *f are limita l în punctul a* dacă:

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\exists\,\delta>0,\forall x\in D\setminus\{a\},|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>\varepsilon$.

În cazul $a=-\infty$ și $l\in\mathbb{R}$, funcția *f are limita l în punctul a* dacă:

$\forall\varepsilon>0,\exists\,\delta\in\mathbb{R},\forall x\in D\setminus\{a\},\ x<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$.

În cazul $a\in\mathbb{R}$ și $l\in\mathbb{R}$, funcția *f are limita l în punctul a* dacă:

$\forall\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall x\in D\setminus\{a\},|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$.

Teorema Heine. Fie $f: D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$ și $l\in\overline{\mathbb{R}}$. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$, dacă și numai dacă oricare ar fi șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $D\setminus\{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, există $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$.

Fie $f: D\to\mathbb{R}$ și $a\in D'\cap\mathbb{R}$ un punct de acumulare bilateral. Funcția f are limită în a dacă și numai dacă f are limită la dreapta și la stânga în a și aceste limite sunt egale.

Scanned with OKEN Scanner

Operații cu limite de funcții

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

♦ Cu excepția cazului $\{l_1, l_2\} = \{-\infty, \infty\}$ (cazul $\infty - \infty$), funcția $f+g$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \begin{cases} l_1 + l_2, & \text{dacă } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = \infty \text{ sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 \in \mathbb{R} \\ -\infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = -\infty \text{ sau } l_1 = -\infty \text{ și } l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

♦ Cu excepția cazului $\{l_1, l_2\} = \{0, \infty\}$ sau $\{l_1, l_2\} = \{0, -\infty\}$ (cazul $0 \cdot \infty$), funcția $f \cdot g$ are limită în punctul a și

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \begin{cases} l_1 \cdot l_2, & \text{dacă } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = \infty \text{ sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 > 0 \text{ sau} \\ & \quad l_1 = -\infty \text{ și } l_2 < 0 \text{ sau } l_1 = l_2 = -\infty \\ -\infty, & \text{dacă } l_1 = \infty \text{ și } l_2 = -\infty \text{ sau } l_1 = -\infty \text{ și } l_2 > 0 \\ & \quad \text{sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 < 0 \end{cases}.$$

♦ Fie $g: D \to \mathbb{R}^*$, $a \in D'$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Avem $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & \text{dacă } l \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{dacă } l \in \{\pm\infty\} \\ \infty, & \text{dacă } l = 0_+ \\ -\infty, & \text{dacă } l = 0_- \end{cases}$.

Dacă $l = 0$ și $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists\ x_1, x_2 \in V \cap D \setminus \{a\}$ cu $g(x_1) > 0$ și $g(x_2) < 0$, atunci $\dfrac{1}{g}$ nu are limită în a.

Metode de eliminare a nedeterminării

Limitele funcțiilor polinomiale

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0,n}, a_n \neq 0$.

♦ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n \left(a_n + a_{n-1}\dfrac{1}{x} + \ldots + a_0 \dfrac{1}{x^n}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_n < 0 \end{cases}$

♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n \text{ par și } a_n > 0 \text{ sau } n \text{ impar și } a_n < 0 \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ impar și } a_n > 0 \text{ sau } n \text{ par și } a_n < 0 \end{cases}$

Limitele funcțiilor raționale

Fie $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ și $f_2(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$, $b_m \neq 0$.

Funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, unde $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) \neq 0\}$ se numește *funcție rațională*.

Scanned with OKEN Scanner

♦ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\searrow 0} y^{m-n}\dfrac{a_n+a_{n-1}y+\ \ldots\ +a_0y^n}{b_m+b_{m-1}y+\ \ldots\ +b_0y^m} = \begin{cases}\infty, & \text{dacă } n>m \text{ şi } a_n\cdot b_m>0\\ -\infty, & \text{dacă } n>m \text{ şi } a_n\cdot b_m<0\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n=m\\ 0, & \text{dacă } n<m\end{cases}$.

Asemănător se procedează pentru $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Limita funcţiilor de forma $f(x)^{g(x)}$

Fie $f:D\to(0,+\infty)$, $g:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l_2$.

Dacă $\exists\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)=b$ şi $\exists V\in\mathcal{V}(a)$ cu $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, $g(x)\ln f(x)\neq b$, atunci

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}e^b, & \text{dacă } b\in\mathbb{R}\\ \infty, & \text{dacă } b=\infty\\ 0, & \text{dacă } b=-\infty\end{cases}.$$

Limite remarcabile. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$

***Criteriul majorării.** Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$.

i) Dacă $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, $\exists l\in\mathbb{R}$, $\exists V\in\mathcal{V}(a)$ cu $|f(x)-l|\leq g(x)$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ şi $\exists V\in\mathcal{V}(a)$, cu $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

iii) Dacă $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$ şi $\exists V\in\mathcal{V}(a)$ cu $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Criteriul „cleştelui"

Fie $f,g,h:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$ şi $V\in\mathcal{V}(a)$.

Dacă $\begin{cases}f(x)\leq g(x)\leq h(x),\ \forall x\in V\cap D\setminus\{a\}\\ \lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}\end{cases}$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$.

Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ şi $\exists M>0$, $\exists V\in\mathcal{V}(a)$ cu $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$ (adică f este mărginită pe o vecinătate a lui a), atunci $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0$

Scanned with OKEN Scanner

Funcții continue

Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ cu $x_0 \in E \cap E' \subset \mathbb{R}$, este continuă în x_0 dacă oricare dintre următoarele propoziții este adevărată:

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

2) $\forall$ șirul $(x_n)_{\mathbb{N}}$ din E, $x_n \xrightarrow{n} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0)$;

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in E, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f are discontinuitate de speța I în $a \in E$ dacă are limite laterale finite în a și nu este continuă.

f are discontinuitate de speța a II-a în $a \in E$ dacă este discontinuă și nu are discontinuitate de speța I.

Un punct de discontinuitate al unei funcții monotone este de prima speță.

Funcțiile elementare (polinomiale, putere, trigonometrice și exponențiale) sunt funcții continue pe întreg domeniul lor de definiție.

Dacă funcțiile $f, g: E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ sunt continue în punctul $x_0 \in E$, atunci funcțiile $af + bg$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$) și $f \cdot g$ sunt continue în x_0. Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $g(x) \neq 0, \forall x \in V \cap E$ și $\dfrac{f}{g}$ este continuă în x_0.

Fie $f: E_1 \to E_2$ și $g: E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subset \mathbb{R})$ și $h = g \circ f: E_1 \to \mathbb{R}$ funcția compusă. Dacă f este continuă în $x_0 \in E_1$ și g este continuă în $f(x_0) \in E_2$, atunci h este continuă în x_0.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema lui Weierstrass de mărginire. Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

1) f este mărginită;

2) f își atinge marginile, adică $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ cu $f(\alpha) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ și $f(\beta) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă și $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = 0$.

Proprietatea lui Darboux.

Spunem că *o funcție* $f: I \to \mathbb{R}$ *are proprietatea lui Darboux pe intervalul* I, dacă $\forall x_1 < x_2$ din I și $\forall \lambda$ între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\exists c \in (x_1, x_2)$ cu $f(c) = \lambda$.

O funcție $f: I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă și numai dacă imaginea oricărui interval prin funcția f este de asemenea interval, adică pentru orice interval $J \subseteq I$, $f(J)$ este interval.

Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ (I – interval) o funcție continuă și injectivă. Atunci f este strict monotonă.

Fie f o funcție continuă pe intervalul I și $J = f(I)$. Funcția $f: I \to J$ este bijectivă dacă și numai dacă f este strict monotonă și, în acest caz, funcția inversă $f^{-1}: J \to I$ este continuă și strict monotonă.

Scanned with OKEN Scanner

Funcții derivabile

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$; atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$

2) $\forall (x_n)_n \subset D \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$

Dacă $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ spunem că *funcția f este derivabilă în* x_0 și $f'(x_0)$ este derivata sa în x_0.

Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci f este continuă în x_0.

Derivate laterale

O funcție $f: D \to \mathbb{R}$ *are derivată la stânga în* x_0, punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$ dacă există $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_s'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

O funcție $f: D \to \mathbb{R}$ *are derivată la dreapta în* x_0, punct de acumulare al mulțimii $D \cap (x_0, \infty)$ dacă există $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_d'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in I$ un punct interior al lui I. Atunci f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0. În acest caz, $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Operații cu funcții derivabile

Fie funcțiile $f, g: D \to \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in D \cap D'$.

♦ Funcția $f+g$ este derivabilă în x_0 și $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

♦ Funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 și $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

♦ Funcția $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

♦ Dacă $g(x_0) \neq 0$, funcția $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

♦ Se consideră funcțiile $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$, $y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$. Dacă f este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în y_0, atunci funcția $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Consecințe. Dacă f și g sunt derivabile pe D și $c \in \mathbb{R}$, atunci:

♦ $f+g$ este derivabilă pe D și $(f+g)' = f' + g'$;

♦ $c \cdot f$ este derivabilă pe D și $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;

♦ $f \cdot g$ este derivabilă pe D și $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;

♦ dacă $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă pe D și $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

♦ dacă $f: D \to E$ și $g: E \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcția compusă $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă și $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, $\forall x \in D$.

Scanned with OKEN Scanner

Formule de derivare a funcțiilor compuse.

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', n \in \mathbb{N}^*$; $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \alpha \in \mathbb{R}^*$;

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0, a \neq 0$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$;

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

$(\text{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u', \cos u \neq 0$; $(\text{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u', \sin u \neq 0$;

$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u^2 < 1$; $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u^2 < 1$;

$(\text{arctg}u)' = \frac{u'}{1+u^2}$; $(\text{arcctg}u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

***Derivate de ordin superior**

Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ este *de* $(n+1)$ *ori derivabilă în* $x_0 \in D \cap D'$, dacă:

1) există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $V \subset D_{f^{(n)}}$;

2) funcția derivată $f^{(n)}: D_{f^{(n)}} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.

În acest caz, limita se notează cu $f^{(n+1)}(x_0)$ (sau $\frac{d^{n+1} f(x_0)}{dx^{n+1}}$ sau $D^{n+1} f(x_0)$) și se numește *derivata de ordin* $(n+1)$ *a funcției* f *în punctul* x_0.

Regula lui Leibniz

Fiind date funcțiile $f, g: D \to \mathbb{R}$ de n ori derivabile, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$.

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție; $x_0 \in D$ se numește *punct de minim absolut* (*global*) al funcției f dacă: $f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in D$. $x_0 \in D$ se numește *punct de maxim absolut* (sau *global*) al funcției f dacă: $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in D$.

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in I$.

x_0 se numește *punct de maxim relativ* (sau *local*) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in V \cap I$; $f(x_0)$ se numește maxim relativ al funcției.

x_0 se numește *punct de minim relativ* (sau *local*) al funcției f, dacă există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in V \cap I$; $f(x_0)$ se numește *minim relativ al funcției.*

$x_0 \in I$ este *punct de extrem relativ* (sau *local*) al lui f dacă este punct de minim sau de maxim relativ (sau local).

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă într-un punct de extrem local x_0 din interiorul intervalului I ($x_0 \in I$ şi nu este capăt al intervalului); atunci $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică. Dacă graficul funcţiei admite tangentă într-un punct de extrem ce nu coincide cu extremităţile graficului, atunci tangenta în acest punct este paralelă cu axa Ox.

Teorema lui Rolle. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:

1) f este continuă pe $[a, b]$.

2) f este derivabilă pe (a, b)

3) $f(a) = f(b)$.

Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Interpretare geometrică. Fie $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$; cum $f(a) = f(b)$ rezultă $AB \parallel Ox$. Dacă graficul funcţiei f admite tangentă în orice punct (cu excepţia, eventual, a extremităţilor A şi B) şi dreapta ce uneşte extremităţile A, B este paralelă cu Ox, atunci există cel puţin un punct al graficului în care tangenta este paralelă cu axa Ox.

Teorema lui Lagrange. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile:

1) f continuă pe $[a, b]$;

2) f derivabilă pe (a, b).

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interpretare geometrică. Dacă graficul lui f admite tangentă în fiecare punct (cu excepţia eventual a extremităţilor) există cel puţin un punct de pe grafic în care tangenta este paralelă cu coarda [AB] ce uneşte extremităţile.

Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

1) Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci f este constantă pe I.

2) Dacă $f, g: I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I şi $f' = g'$, atunci $g - f =$ constant.

3) *Monotonia funcţiilor.* O funcţie $f: I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul I cu $f' > 0$ este strict crescătoare, iar dacă $f' < 0$ atunci f este strict descrescătoare.

Teorema lui Cauchy. Dacă funcţiile $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ îndeplinesc condiţiile:

1) f şi g sunt continue pe intervalul închis $[a, b]$;

2) f şi g sunt derivabile pe intervalul deschis (a, b) ;

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$;

atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema Darboux. Dacă f este o funcţie derivabilă pe intervalul I, atunci f' are proprietatea lui Darboux pe I.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Teorema l'Hospital. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $I \subset \mathbb{R}$ un interval cu $(a, b) \subset I \subset [a, b]$. Dacă $x_0 \in [a, b]$ şi $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii cu proprietăţile:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$);

2) f şi g sunt derivabile şi $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

3) există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ finită sau infinită;

atunci $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ (respectiv $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, cu $g(x) \neq 0, \forall x \in I \cap V \setminus \{x_0\}$) şi există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul I este convexă dacă şi numai dacă f' este crescătoare.

Punctul x_0 este *de inflexiune* al funcţiei f dacă f are derivată în x_0 (finită sau infinită) şi dacă de o parte a lui x_0 f este convexă, iar de cealaltă parte a lui x_0 funcţia f este concavă.

Asimptote

Fie funcţia $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare al lui D. Dreapta de ecuaţie $x = x_0$ este *asimptota verticală* la graficul funcţiei f, dacă cel puţin una dintre limitele laterale: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ sau $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ există şi este infinită.

Dacă D este o mulţime nemărginită la dreapta (∞ este punct de acumulare pentru D), atunci dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* la $+\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$ fixate.

Dacă D este o mulţime nemărginită la stânga ($-\infty$ este punct de acumulare pentru D), atunci dreapta de ecuaţie $y = m'x + n'$ este *asimptotă oblică* la $-\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0$, $m', n' \in \mathbb{R}$ fixate.

Dreapta de ecuaţie $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ a lui f dacă şi numai dacă există şi sunt finite numerele reale m, n unde $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$.

Dreapta de ecuaţie $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la $-\infty$ a lui f dacă şi numai dacă există şi sunt finite m', n' unde $m' = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n' = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m'x]$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a, M_1
Legi de compoziție

Tabla operației φ (*Tabla lui Cayley*) pe mulțimea M, este un tabel cu linii și coloane corespunzătoare elementelor mulțimii M. La intersecția liniei a_i cu coloana a_j se află compusul lui a_i cu a_j prin operația φ.

φ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	.....			$\varphi(a_i, a_j)$		
$\vdots$						
a_n						

• O submulțime nevidă H a lui M se numește *parte stabilă* în raport cu legea de compoziție „$*$" dacă $\forall x, y \in H,\ x * y \in H$.

Proprietăți. *Legea de compoziție* $M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x * y$

♦ este *comutativă* dacă: $x * y = y * x,\ \forall x, y \in M$.

♦ este *asociativă* dacă: $(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall x, y, z \in M$.

♦ admite *element neutru* dacă: $\forall x \in M\ \ e * x = x * e = x$. Elementul neutru, dacă există este unic.

♦ o lege asociativă și cu element neutru are *elemente simetrizabile* dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție „$*$" (asociativă și cu element neutru), atunci $x * y$ și x' sunt simetrizabile. În plus avem:

1) $(x * y)' = y' * x'$; 2) $(x')' = x$.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Pe $\mathbb{Z}_n$ definim operațiile numite *adunarea* și *înmulțirea claselor de resturi modulo n* astfel: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \widehat{\alpha + \beta},\ \hat{\alpha}\hat{\beta} = \widehat{\alpha\beta},\ \forall\ \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{Z}_n$ cu $\alpha, \beta \in T_n$.

Adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{0}$ ca element neutru și orice clasă de resturi admite opusă. Înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă și admite pe $\hat{1}$ ca element neutru și este *distributivă* față de adunare: $\hat{a}(\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c},\ \forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_n$.

Grupuri

Un cuplu $(G, *)$, format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție „$*$" pe G, este *grup* dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

G_1) $\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

G_2) $\exists\ e \in G$, astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in G$.

G_3) $\forall x \in G, \exists x' \in G$ cu $x' * x = x * x' = e$.

Dacă, în plus, este satisfăcută și axioma G_4. $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, atunci G se numește *grup comutativ* sau *abelian*.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Un cuplu $(M, *)$ format cu o mulțime nevidă M și o lege de compoziție „$*$" pe M, se numește *monoid* dacă:

M_1: $\forall x, y, z \in M, (x * y) * z = x * (y * z)$.

M_2: $\exists e \in M$ astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in M$.

Regulile de simplificare într-un grup.

Fie $(G, *)$ un grup. Pentru orice $a, b, c \in G$ avem:

$$a*b = a*c \Rightarrow b = c \quad \text{și} \quad b*a = c*a \Rightarrow b = c$$

Fie $(G, *)$ grup, $a, b \in G$ și a' simetricul lui a. Ecuația $a*x = b$ are în G soluția unică $x = a'*b$ și ecuația $y*a = b$ are în G soluția unică $y = b*a'$.

Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. O funcție $f: G \to G'$ se numește *izomorfism de grupuri* dacă:

(1) $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G$; (2) f este bijectivă.

Grupul G este *izomorf* cu grupul G' ($G \simeq G'$), dacă există un izomorfism $f: G \to G'$.

Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. Dacă $f: G \to G'$ este izomorfism, atunci $f^{-1}: G' \to G$ este izomorfism.

Fie grupurile $(G, \circ)$ și $(G', *)$. Funcția $f: G \to G'$ (nu obligatoriu bijectivă) se numește *morfism* de grupuri dacă:

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G.$$

Fie grupurile $(G, \circ)$ și $(G', *)$ având elementele neutre e și e'. Dacă $f: G \to G'$ este morfism de grupuri, atunci: (1) $f(e) = e'$ (2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}, \forall x \in G$.

*Fie $(G, *)$ un grup și H o submulțime a lui G.

$(H, *)$ se numește *subgrup* al lui G dacă $(H, *)$ este grup.

Fie $(G, *)$ un grup cu elementul neutru e și H un subgrup al lui G. Atunci $e \in H$.

Fie $(G, *)$ grup și $H \subset G$, $H \neq \emptyset$. $(H, *)$ este subgrup al lui G, dacă și numai dacă $\forall x, y \in H$, $x * y' \in H$, unde y' este inversul lui y în G.

Fie $(G, \cdot)$ un grup de element neutru e și $a \in G$. Spunem că a este element de *ordin finit* (sau *torsionat*) al grupului G dacă există $m > 0$ astfel încât $a^m = e$.

Dacă a este torsionat, atunci cel mai mic număr $m > 0$ cu proprietatea $a^m = e$ se numește *ordinul* lui a și notăm $\text{ord}a = m$.

Dacă a este element de ordin m al grupului G, atunci $H = \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$ este subgrup de ordin m al lui G.

Fie $(G, \cdot)$ un grup, $a \in G$ și $m \in \mathbb{N}^*$. Sunt echivalente afirmațiile:

(1) $\text{ord}a = m$ (2) $\forall k \in \mathbb{Z}, a^k = e \Rightarrow m \mid k$ și $a^m = e$.

Scanned with OKEN Scanner

Inele și corpuri

Un triplet $(R, +, \cdot)$, unde R este o mulțime nevidă iar „ + “ și „ $\cdot$ “ sunt două legi de compoziție pe R (numite *adunare* și *înmulțire*), este *inel* dacă:

(G) $(R, +)$ este grup abelian

(M) $(R, \cdot)$ este monoid

(D) înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$\forall x, y, z \in R,\ x(y+z) = xy + xz,\ (y+z)x = yx + zx.$$

Inelul R nu are divizori ai lui zero, dacă $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

Un *inel* R se numește *comutativ* dacă satisface și axioma: $(M_3)\ xy = yx, \forall x, y \in R$.

Un inel R comutativ, cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero, se numește *domeniu de integritate*.

Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ se numește *inelul întregilor lui Gauss*.

Fie $(R, +, \cdot)$ inel. Operația $y - z = y + (-z)$, $y, z \in R$ se numește *diferență*.

Într-un inel $(R, +, \cdot)$ au loc următoarele proprietăți:

1) $\forall x \in R, x0 = 0x = 0$.

2) *Într-un inel cu cel puțin două elemente avem $1 \neq 0$.*

3) *Regula semnelor:* $\forall x, y \in R,\ (-x)y = x(-y) = -xy$ și $(-x)(-y) = xy$.

4) *Distributivitatea înmulțirii față de scădere:* $\forall x, y, z \in R,\ x(y-z) = xy - xz$ și $(y-z)x = yx - zx$.

5) Într-un inel R fără divizori ai lui zero putem simplifica cu elemente diferite de 0, adică $\forall x, y, z \in R, x \neq 0, xy = xz$ sau $yx = zx \Rightarrow y = z$.

Elementele inversabile ale unui inel R se numesc *unități* ale lui R. Notăm cu $U(R)$ mulțimea unităților inelului R. $U(R)$ este grup în raport cu operația indusă de înmulțirea lui R, numit *grupul unităților* inelului R.

Fie I o mulțime nevidă și R un inel. Notăm $R^I = \{f \mid f : I \to R\}$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : I \to R$. Pentru $f, g \in R^I$ și $x \in I$, $f(x)$ și $g(x)$ sunt elemente ale inelului R. Putem defini astfel funcțiile: $f+g : I \to R,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in I$ și $fg : I \to R,\ (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ numite *suma*, respectiv *produsul* funcției f cu funcția g.

$(R^I, +, \cdot)$ este inel și, în cazul în care $(R, +, \cdot)$ este comutativ, $(R^I, +, \cdot)$ este inel comutativ.

Dacă R este domeniu de integritate, atunci $R[X]$ este domeniu de integritate și $\forall f, g \in R[X], f \neq 0, g \neq 0$, $\text{grad}fg = \text{grad}f + \text{grad}g$.

Fie R inel comutativ, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in R[X]$ și $\alpha \in R$. Elementul $f(\alpha) \overset{def}{=} a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n \in R$, se numește *valoarea* în α a polinomului f. Valoarea sumei și a produsului polinoamelor $f, g \in R[X]$ în $\alpha \in R$ este egală cu suma, respectiv produsul valorilor lui f și g în α: $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$, $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

Fie $f \in R[X]$. Funcția $f^* : R \to R$ definită prin $f^*(x) = f(x) \in R, \forall x \in R$, este *funcția polinomială* asociată polinomului f. Vom nota funcția f^* tot cu f.

Scanned with OKEN Scanner

Zerourile funcției polinomiale f, se numesc *rădăcini* (din R) ale polinomului f. Așadar, un element $\alpha \in R$ este *rădăcină* (din R) a polinomului $f \in R[X]$ dacă $f(\alpha) = 0$.

Fie R inel comutativ, $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in R[X]$, $a_n \neq 0$ și $\alpha \in R$. Există $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ și r în R, unic determinați, cu $f = (X - \alpha)(c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_1X + c_0) + r$. În plus, $r = f(\alpha)$.

Teorema restului: Restul împărțirii polinomului $f \in R[X]$ prin $X - \alpha \in R[X]$ este $f(\alpha)$.

Teorema factorului, Bézout: Polinomul $f \in R[X]$ se divide prin $X - \alpha \in R[X]$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = 0$.

Un inel K se numește *corp* dacă $0 \neq 1$ și orice element nenul din K este simetrizabil în raport cu înmulțirea. Dacă înmulțirea este comutativă, K se numește *corp comutativ*.

Proprietăți

1) *Un corp nu are divizori ai lui zero.*
2) *Elementele nenule ale unui corp formează grup cu înmulțirea.*
3) *Orice domeniu de integritate finit este corp.*

Fie inelele $(R, +, \cdot)$ și $(R', \oplus, \odot)$. O funcție $f: R \to R'$ se numește *morfism de inele* dacă, $\forall x, y \in R$: (1) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$; (2) $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$; (3) $f(1) = 1'$, unde 1 este unitatea inelului R și $1'$ unitatea lui R'.

Un morfism de inele bijectiv se numește *izomorfism*. Inelul R este izomorf cu inelul R', și scriem $R \simeq R'$, dacă există cel puțin un izomorfism $f: R \to R'$.

Fie $f: R \to R'$ un morfism de inele. Atunci

- $f(0) = 0'$, 0 fiind elementul nul din R și cu $0'$ cel din R'.
- $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in R$.
- Dacă $x \in R$ este inversabil în inelul R, atunci $f(x)$ este element inversabil al inelului R' și $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

O funcție $f: K \to K'$ de la un corp K la un corp K' se numește *morfism (izomorfism)* de corpuri dacă este morfism (izomorfism) de la K la K' considerate ca inele.

Orice morfism de corpuri $f: K \to K'$ este injectiv.

Fie K un corp comutativ și $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$.

*Există unic determinate polinoamele $q, r \in K[X]$ care satisfac *ecuația împărțirii* $f = gq + r$, unde grad $r <$ grad g dacă $r \neq 0$.

- f *este divizibil cu* g și notăm $g \mid f$ sau $f \vdots g$, dacă există $h \in K[X]$ cu $f = g \cdot h$.
- Fie $a \in K$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; a este *rădăcină multiplă de ordin* n dacă $(X - a)^n \mid f$ și $(X - a)^{n+1} \nmid f$.

*Fie K corp comutativ, $f \in K[X]$, $a \in K$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Polinomul f are a rădăcină multiplă de ordinul n, dacă și numai dacă $f(a) = 0$; $f'(a) = 0$; ...; $f^{(n-1)}(a) = 0$; $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Fie corpul comutativ K, $f \in K[X]$ și $a, b \in K$, $a \neq b$. Polinomul $f \vdots (X - a)(X - b)$, dacă și numai dacă $f(a) = f(b) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

*Fie K un corp comutativ şi $f \in K[X]$ un polinom de grad $f = n > 0$. Spunem că polinomul f este *reductibil* peste K dacă există polinoamele $g, h \in K[X]$, de grade strict mai mici ca n, cu $f = gh$. În caz contrar, spunem că f este *ireductibil* peste K.

Fie K corp comutativ şi $f, g \in K[X]$. Spunem că f este *asociat în divizibilitate* cu g şi scriem $f \sim g$, dacă $f \mid g$ şi $g \mid f$.

*Orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, grad$f > 0$ se reprezintă ca produs finit de polinoame de grad 1 din $\mathbb{C}[X]$, unic determinate mai puţin ordinea şi o asociere în divizibilitate.

*Orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $f > 0$ se reprezintă ca produs finit de polinoame de grad 1 şi de grad 2 din $\mathbb{R}[X]$ fără rădăcini reale, unic determinate mai puţin ordinea factorilor şi o asociere în divizibilitate..

Spaţii vectoriale

Fie V şi K mulţimi nevide. O aplicaţie $\psi : K \times V \to V$ se numeşte *lege de compoziţie externă* pe V cu *scalari* (sau *operatori*) în K.

Fie corpul comutativ $(K, +, \cdot)$. Este *spaţiu vectorial* (sau spaţiu liniar) peste K un grup abelian $(V, +)$ înzestrat cu o lege de compoziţie externă cu scalari în K, $(\alpha, u) \mapsto \alpha u$, ce verifică axiomele:

S_1) $\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, u \in V, (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (*distributivitatea înmulţirii vectorilor cu scalari faţă de adunarea scalarilor*)

S_2) $\forall\, \alpha \in K, \forall\, u, v \in V, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (*distributivitatea înmulţirii vectorilor cu scalari faţă de adunarea vectorilor*)

S_3) $\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, u \in V, \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (*asociativitatea înmulţirilor scalarilor şi vectorilor*)

S_4) $\forall\, u \in V, 1 \cdot u = u$ (1, unitatea din K, este elementul neutru pentru înmulţirea vectorilor cu scalari)

Proprietăţi

1) Fie $\alpha \in K$ şi $v \in V$, $\alpha v = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $v = 0$

2) Oricare ar fi $\alpha \in K$ şi $v \in V$, avem $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -\alpha v$, $(-\alpha)(-v) = \alpha v$ *(regula semnelor)*

3) Oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$ şi $u, v \in V$ avem: $(\alpha - \beta)v = \alpha v - \beta v$, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K, $v_1, v_2, .., v_p$ din V şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$. Vectorul de forma $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p$, este o *combinaţie liniară* de vectorii $v_1, v_2, ..., v_p$.

Vectorii $v_1, v_2, ..., v_p$ sunt *liniar independenţi* dacă $\forall\, \lambda_1, ..., \lambda_p \in K, \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$ implică $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.

Fie V spaţiu vectorial peste K. Un sistem $B = (v_1, ..., v_n)$ de vectori $v_i \in V, 1 \leqslant i \leqslant n$ *este bază* (*finită*) a lui V dacă:

1) $\forall\, x \in V, \exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ a.î. $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$;

2) $v_1, ... v_n$ sunt liniar independenţi.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, orice vector v din V are o unică reprezentare ca o combinație liniară de vectorii bazei B, $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n$.

Fie V și V' două spații vectoriale peste același corp K. O aplicație $f: V\to V'$ se numește *aplicație liniară* (sau *transformare liniară*) de la spațiul vectorial V la V' dacă:

1) $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in V$; 2) $f(\lambda x)=\lambda f(x), \forall \lambda\in K$ și $\forall x\in V$.

Dacă $V=V'$, atunci f se mai numește *operator liniar* pe V sau *endomorfism* al lui V.

Dacă $f: V\to V'$ este o aplicație liniară, atunci f este în particular un morfism de la grupul $(V,+)$ la grupul $(V',+)$. Atunci:

$$f(0)=0',\quad f(-x)=-f(x),\forall x\in V,\quad f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(v_i),\ \forall\lambda_i\in K, v_i\in V,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Fie V și V' spații vectoriale peste un corp K, $\lambda\in K$ și $f: V\to V'$, $g: V\to V'$ aplicații liniare. Aplicația $f+g: V\to V'$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ este *suma* lui f cu g, iar $\lambda f: V\to V'$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ este *produsul* lui λ cu f.

Dacă V, V', V'' sunt spații vectoriale peste K și $g: V\to V'$, $f: V'\to V''$ sunt aplicații liniare, atunci aplicația $f\circ g: V\to V''$ definită prin $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ este *compusa* lui f cu g.

Fie V și V' două spații vectoriale peste un corp K. O aplicație liniară $f: V\to V'$ bijectivă se numește *izomorfism* de spații vectoriale. Spunem că spațiul vectorial V este *izomorf* cu spațiul vectorial V' și scriem $V\simeq V'$ dacă există cel puțin un izomorfism $f: V\to V'$.

Noțiunea de integrală

Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci șirul $\left(S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la un număr, notat $\int_a^b f(x)dx$, pe care-l vom citi *integrala funcției f pe $[a,b]$*.

Considerăm o funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcția definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Atunci F este derivabilă și $F'=f$.

Fie I un interval și funcțiile $f: I\to\mathbb{R}$, $F: I\to\mathbb{R}$. Funcția F se numește *primitivă* a lui f dacă: 1) F este derivabilă 2) $F'(x)=f(x), \forall x\in I$.

Spunem că *o funcție f admite primitive pe intervalul I* dacă există o primitivă a funcției f.

Fie I un interval și funcția $f: I\to\mathbb{R}$ care admite primitive. Dacă $F_1, F_2: I\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f, atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x)=F_2(x)+c, \forall x\in I$.

Fie un interval I și o funcție $f: I\to\mathbb{R}$ care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f se notează prin $\int f(x)\,dx$ și se numește *integrala nedefinită a funcției f*: $\int f(x)\,dx=\{F: I\to\mathbb{R}\mid F \text{ este primitivă a funcției } f\}$.

Dacă funcția $f: I\to\mathbb{R}$ admite o primitivă F, atunci $\int f(x)\,dx=F+\mathscr{C}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcțiile $f+g$ și λf admit primitive și, în plus, au loc relațiile: a) $\int f(x)dx = \int f(x)dx + \mathscr{C}$

b) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ c) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

O funcție continuă pe un interval, admite primitive pe acel interval

Derivata oricărei funcții derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I, atunci funcția f are proprietatea lui Darboux pe I.

Formula de integrare prin părți

Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval și $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcții derivabile cu deri-vatele continue. Atunci funcțiile $f' \cdot g$ și $f \cdot g'$ admit primitive și

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx .$$

Teorema de schimbare de variabilă.

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale, $\varphi : I \to J$ și $f : J \to \mathbb{R}$ funcții cu proprietățile:

1) f admite primitiva F pe J; 2) φ este derivabilă pe I.

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite pe I primitiva $F \circ \varphi$.

Putem scrie $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f(t)dt\right) \circ \varphi$.

1) $\int \varphi^a(x) \cdot \varphi'(x)dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + \mathscr{C}$, $a \neq -1, \varphi > 0$

2) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + \mathscr{C}$, $\varphi \neq 0$

3) $\int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + \mathscr{C}$, $a > 0, a \neq 1$

4) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right| + \mathscr{C}$, $\varphi \neq \pm a, a \neq 0$

5) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{a} + \mathscr{C}$, $a \neq 0$

6) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}}dx = \ln(\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}) + \mathscr{C}$, $a \neq 0$

7) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}}dx = \ln\left|\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2}\right| + \mathscr{C}$, $\varphi^2 > a^2$

8) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + \mathscr{C}$, $a > 0$, $-a < \varphi < a$

9) $\int \varphi'(x)\sin\varphi(x)dx = -\cos\varphi(x) + \mathscr{C}$

10) $\int \varphi'(x)\cos\varphi(x)dx = \sin\varphi(x) + \mathscr{C}$

Scanned with OKEN Scanner

11) $\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} dx = \operatorname{tg}\varphi(x) + \mathscr{C}$, $\varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in I$

12) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} dx = -\operatorname{ctg}\varphi(x) + \mathscr{C}$, $\varphi(x) \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in I$

13) $\int \varphi'(x)\operatorname{tg}\varphi(x) dx = -\ln|\cos\varphi(x)| + \mathscr{C}$, $\varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in I$

14) $\int \varphi'(x)\operatorname{ctg}\varphi(x) dx = \ln|\sin\varphi(x)| + \mathscr{C}$, $\varphi(x) \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in I$

Integrarea funcţiilor raţionale

O funcţie raţională simplă are una din formele:

1) $f(x) = P(x)$, $P \in \mathbb{R}[X]$; 2) $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$, $A, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$, $A, B, a, b \in \mathbb{R}$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

O funcţie raţională se descompune, în mod unic, în sumă de funcţii raţionale simple.

Fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Conform teoremei împărţirii cu rest, există şi sunt unice polinoamele $C, R \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ şi $\operatorname{grad} R < \operatorname{grad} Q$. Pentru a descompune $\frac{R(x)}{Q(x)}$ în funcţii raţionale simple, descompunem polinomul Q în factori ireductibili, care pot fi numai de gradul I (de forma $x - a$) sau de gradul II (de forma $x^2 + ax + b$, cu $a^2 - 4b < 0$): $\frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a}$;

$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$; $\frac{R(x)}{x^2+ax+b} = \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ ..., unde $A, B \in \mathbb{R}$.

- $\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0) dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + ... + a_0 x + \mathscr{C}$.
- $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathscr{C}$, $n \in \{2, 3, 4, ...\}$.
- $\int \frac{A}{x-a} dx = A\ln|x-a| + \mathscr{C}$.
- $\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2B-aA}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{|\Delta|}} + \mathscr{C}$.

Integrale definite

Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei continue $f : I \to \mathbb{R}$. *Integrală definită (sau integrală) a funcţiei f de la a la b* este numărul real:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ (formula Leibniz-Newton).}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăți:

♦ *Proprietatea de liniaritate a integralei:*

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.

♦ *Proprietatea de aditivitate a integralei:* $\forall c \in I, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

♦ *Proprietatea de medie a integralei:* $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.

♦ *Proprietatea de pozitivitate a integralei:* dacă $f \geqslant 0$ pe $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

♦ *Proprietatea de monotonie a integralei:* dacă $f \leqslant g$ pe $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Interpretarea geometrică a integralei definite

Fie numerele reale $a < b$ și funcția continuă pozitivă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Subgraficul* funcției f este $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

Suma Riemann (sau *sumă integrală*) asociată lui f, Δ și ξ este numărul real $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, unde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$ este *sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii* $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b)$.

Aria subgraficului unei funcții continue pozitive $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este: aria $(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$.

****Integrala Riemann a funcțiilor continue pe porțiuni***

Funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numește *continuă pe porțiuni* dacă are cel mult un număr finit, nenul, de puncte de discontinuitate și acestea sunt puncte de discontinuitate de speța întâi.

Integrarea funcțiilor continue pe porțiuni. O funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe porțiuni este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{p} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x)dx$, unde $f_i : [c_{i-1}, c_i] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., p\}$, sunt funcțiile continue asociate lui f.

Metode de calcul a integralelor definite

Formula de integrare prin părți. Presupunem că funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele $f', g' : I \to \mathbb{R}$ continue. Fie două numere $a, b \in I$. Atunci:

$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$.

Formula de schimbare de variabilă. Presupunem că funcția $\varphi : J \to I$ este derivabilă, cu derivata continuă și funcția $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă. Fie două numere $\alpha, \beta \in J$. Atunci: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. Se fac schimbările, de variabilă și de simbol, $\varphi(t) = x$ și $\varphi'(t)dt = dx$, $t \in J$ și $x \in I$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicații ale integralei definite

Aria unei suprafețe mărginită de grafice de funcții

Fie funcțiile $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ continue (sau continue pe porțiuni). Presupunem că $g(x)\leqslant f(x), \forall\, x\in[a, b]$. Suprafața dintre graficele funcțiilor f și g pe $[a, b]$ este $\Gamma=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \text{ și } g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\}$. Aria suprafeței Γ este $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

Volumul unui corp de rotație

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Mulțimea $\mathcal{V}=\left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2}\leqslant|f(x)|\right\}$ se numește *corpul de rotație* în jurul axei Ox determinat de funcția f și are volumul $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

****Aria unei suprafețe de rotație***

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}_+$ o funcție continuă.

Mulțimea $\mathcal{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2}=f(x), x\in[a, b]\}$ se numește *suprafața de rotație* determinată de funcția f sau suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox și are aria $A(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}_+$ o funcție cu derivata continuă pe (a, b), astfel încât funcția $f\cdot\sqrt{1+(f')^2}$ are limite finite în punctele a și b. Suprafața de rotație determinată de f are aria $A(f)=2\pi\int_a^b h(x)dx$, unde $h:[a, b]\to\mathbb{R}$ este prelungirea prin continuitate a lui $f\cdot\sqrt{1+(f')^2}$ la intervalul închis $[a, b]$.

****Lungimea graficului.*** Lungimea graficului unei funcții $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivată continuă este $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

****Centrul de greutate***

Fie $\mathcal{E}$ o placă plană, mărginită de funcțiile continue $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$. Centrul de greutate al lui $\mathcal{E}$ este punctul G de coordonate $x_G=\dfrac{\int_a^b x(g(x)-f(x))dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))dx}$, $y_G=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))dx}$.

Scanned with OKEN Scanner

*Ecuații diferențiale

Ecuația diferențială cu variabile separabile este de forma: $g(y)\cdot y' = f(x)$, unde $f: I \to \mathbb{R}$ și $g: J \to \mathbb{R}$ sunt două funcții continue. Ecuația este echivalentă cu $g(y)dy = f(x)dx$. Integrând, obținem $(G \circ y)(x) = F(x) + c$ și $y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$, unde G este o primitivă a lui g, F o primitivă a lui f, iar $c \in \mathbb{R}$.

Ecuația diferențială liniară de ordinul I este de forma: $y' = p(x)\cdot y + q(x)$, unde $p, q: I \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue. Soluția acestei ecuații o funcție $\varphi: I \to \mathbb{R}$, derivabilă, care verifică: $\varphi'(x) = p(x)\cdot\varphi(x) + q(x)$, $\forall x \in I$.

Rezolvarea ecuației omogene: $y' = p(x)\cdot y$

Ecuația omogenă $y' = p(x)\cdot y$, $p: I \to \mathbb{R}$ are soluția $\varphi: I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = k\cdot e^{P(x)}$, $\forall x \in I$.

Ecuația $y'' + hy' + ky = 0$ cu $h^2 - 4k > 0$, $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$ admite cel puțin o soluție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma $f(x) = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$, unde r_1, r_2 sunt soluțiile ecuației caracteristice $r^2 + hr + k = 0$, iar a și b numere reale determinate din condițiile $f(x_0) = y_0$ și $f'(x_0) = y'_0$.

Avem următoarele situații:

Δ	soluțiile ecuației $r^2 + hr + k = 0$	soluția ecuației $y'' + hy' + ky = 0$
$h^2 - 4k > 0$	r_1, r_2 reale, distincte	$f(x) = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$
$h^2 - 4k = 0$	$r_1 = r_2$	$f(x) = (ax + b)e^{r_1 x}$
$h^2 - 4k < 0$	$r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $r_1 = \alpha + i\beta$	$f(x) = (a\cos\beta x + b\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x}$

Scanned with OKEN Scanner

Modele de teste pentru bacalaureat

Matematică-informatică
Varianta 1

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinoamele $f = X^6 + X^3 + 1$, cu rădăcinile $x_1, ..., x_6 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile y_1 și y_2.

(3p) **1.** Cât este câtul împărțirii polinomului f la polinomul g ?

(3p) **2.** Cât este restul împărțirii polinomului f la polinomul g ?

(3p) **3.** Cât este suma $f(y_1) + f(y_2)$?

(3p) **4.** Cât este suma $g(x_1) + ... + g(x_6)$?

(3p) **5.** Care este numărul de rădăcini reale ale polinomului f ?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \text{arctg}x$.

(3p) **6.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

(3p) **7.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **9.** Care este asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f ?

(3p) **10.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Câte numere naturale $n \in \mathbb{N}$ verifică relația $\sin n < 0$?

(4p) **12.** Care este partea imaginară a produsului $i \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^{2005}$?

(4p) **13.** Care este modulul numărului $\dfrac{1-i}{2+3i}$?

(4p) **14.** Care este cosinusul unghiului făcut de planele $x + y + z = 1$ și $y = 0$?

(2p) **15.** Care este ecuația planului care trece prin punctele $A(1, 2, -3)$, $B(2, -3, 1)$ și $C(-3, 1, 2)$?

(2p) **16.** În câte puncte intersectează dreapta $y = x$ hiperbola $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix} \mid \hat{x},\hat{y}\in\mathbf{Z}_5\right\}$.

(4p) a) Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in G$ și $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\in G$.

(2p) b) Să se arate că, dacă $\hat{x},\hat{y}\in\mathbf{Z}_5$ și $\hat{x}^2-\hat{2}\hat{y}^2=\hat{0}$, atunci $\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}$.

(4p) c) Să se arate că, dacă $A, B\in G$, atunci $A+B\in G$ și $AB\in G$.

(4p) d) Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

(2p) e) Să se arate că, dacă $A\in G$ și $A\neq O_2$, atunci există $B\in G$ astfel încât $AB=I_2$.

(4p) f) Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{2002}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) a) Să se calculeze $f(1)$.

(4p) b) Să se verifice că $(x-1)f(x)=x^{2003}-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) c) Să se arate că $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) d) Să se arate că $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(2p) e) Să se arate că funcția F este bijectivă.

Notăm cu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inversa funcției F și $a=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2003}$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_0^a g(x)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 2

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

În inelul $\mathbb{Z}_{24}$ considerăm ecuațiile $\hat{x}^3 = \hat{0}$, $\hat{x}^2 = \hat{x}$, $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$.

(3p) **1.** Câte elemente inversabile în raport cu înmulțirea are inelul $\mathbb{Z}_{24}$?

(3p) **2.** Care este produsul soluțiilor ecuației $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$?

(3p) **3.** Care este suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^2 = \hat{x}$?

(3p) **4.** Care este numărul de soluții ale ecuației $\hat{x}^3 = \hat{0}$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca, alegând un element din inelul $\mathbb{Z}_{24}$, acesta să fie o soluție a ecuației $\hat{x}^3 = \hat{0}$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^{2004} + x + 1$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 f(x)\,dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2005}}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este valoarea maximă a expresiei $2\sin x\cos x$, când $x \in \mathbb{R}$?

(4p) **12.** Care este perimetrul triunghiului ABC, unde $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ și $C(2, 1)$?

(4p) **13.** Care este aria triunghiului ABC, unde $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ și $C(2, 1)$?

(4p) **14.** Care este partea reală a numărului $\dfrac{1}{2+3i}$?

(2p) **15.** În câte puncte intersectează dreapta $x = 1$ cercul $x^2 + y^2 = 1$?

(2p) **16.** Care este cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ și $g = X^4 - 1$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

Se mai consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se verifice că $g = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.

(2p) b) Să se arate că $\det(V) \neq 0$.

(2p) c) Să se arate că $AV = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.

(4p) d) Utilizând relația de la punctul c), să se arate că $\det(A) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) f(x_4)$.

(4p) e) Pentru $a = c = d = 0$ și $b = 1$, să se calculeze A^2 și A^4.

(4p) f) Pentru $a = c = d = 0$ și $b = 1$, să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

Subiectul IV (20p)

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} x^n$, $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$g(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ și $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)\,dt$.

(4p) a) Să se calculeze $g(0)$ și $h(0)$.

(4p) b) Să se verifice că $g'(x) = h'(x)$, $\forall\, x \geqslant 0$.

(4p) c) Să se arate că $h(x) = g(x)$, $\forall\, x \geqslant 0$.

(4p) d) Să se arate că $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{e^{-x} x^{n+1}}{n!}$, $\forall\, x \in [0, n]$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $x \geqslant 0$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$.

(2p) f) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall\, x \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 3

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este expresia $f - (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$?

(3p) **2.** Câte rădăcini reale are polinomul f?

(3p) **3.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

(3p) **4.** Cât este produsul $x_1x_2x_3x_4$?

(3p) **5.** Cât este suma $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

(3p) **6.** Care este ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f?

(3p) **7.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **8.** Câte este $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3p) **9.** Care este aria suprafeței plane cuprinsă între axa Ox, graficul funcției f și dreptele $x = 1$ și $x = -1$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este distanța de la punctul $A(3, 2)$ la dreapta d: $x - y - 1 = 0$ în sistemul cartezian xOy?

(4p) **12.** Care este modulul numărului $z=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2005}$?

(4p) **13.** Care este cosinusul unghiului făcut de planul (ABC) cu planul yOz, unde $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$?

(4p) **14.** Care este ecuația tangentei la hiperbola $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ în punctul $A(4, 0)$?

(2p) **15.** În câte puncte intersectează dreapta $x = y$ cercul $x^2 + y^2 = 1$?

(2p) **16.** Scrieți un vector paralel cu vectorul $2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$.

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) b) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa ei.

(4p) c) Să se arate că, dacă $Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $YA=AY$, atunci există $a, b, c\in\mathbb{C}$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$.

(4p) d) Se consideră matricea $Z=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$, cu $a, b, c\in\mathbb{C}$. Să se arate, utilizând metoda inducției matematice, că $Z^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) e) Se consideră polinomul $f=X^n-\alpha$, unde $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Să se arate că polinomul f nu are rădăcini multiple .

(2p) f) Să se determine numărul de soluții $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ale ecuației $X^{2002}=A$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \text{ și } b_n=a_n+\frac{1}{n!\cdot n},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Admitem cunoscut că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent către e.

(4p) a) Să se verifice că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

(4p) b) Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

(4p) c) Să se arate că $a_{n+1}<e<b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) d) Utilizând inegalitățile de la punctul c) să se arate că

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-a_n<\frac{1}{n!\cdot n},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

(2p) e) Utilizând inegalitățile de la punctul d) să se arate că numărul e este irațional.

(2p) f) Să se arate că *nu există* două polinoame nenule $f, g\in\mathbb{R}[X]$, cu proprietatea $a_n=\frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 4

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.

(3p) **1.** Care este suma elementelor matricei A^2 ?

(3p) **2.** Cât este $X(a) \cdot X(b)$?

(3p) **3.** Cât este $\det X(a)$?

(3p) **4.** Câte matrice inversabile conține mulțimea G?

(3p) **5.** Care este matricea $(X(a))^{-1}$ dacă $X(a)$ este inversabilă?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}x + \text{arcctg}x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $f(0)$?

(3p) **8.** Cât este $\int_{10}^{20} f(x)dx$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este ecuația tangentei la parabola $y^2 = 2x$ în punctul $A(2, 2)$?

(4p) **12.** Scrieți un număr complex care are argumentul în cadranul 1 și unul în cadranul 2.

(4p) **13.** Care este ecuația planului care trece prin punctele $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$, $C(1, 1, 1)$?

(4p) **14.** Care este distanța de la punctul $A(1, 2, 3)$ la planul $x - y + z = 2$?

(2p) **15.** Care este volumul tetraedrului $ABCD$, unde $A(1, 2, 3)$; $B(2, 3, 1)$; $C(3, 1, 2)$ și $D(1, 1, 1)$?

(2p) **16.** Câte soluții reale are ecuația $z^{2004} = 1$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Pentru orice număr natural nenul n, se consideră mulțimea de numere raționale $H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(4p) a) Să se arate că, dacă $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.

(4p) b) Să se verifice că, dacă $x \in H_n$, atunci $-x \in H_n$.

(4p) c) Să se arate că, dacă $n < p \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset H_p$.

(2p) d) Să se arate că, pentru orice număr rațional r, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r \in H_n$.

(4p) e) Să se arate că, dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.

(2p) f) Să se demonstreze că, dacă $G_1, \ldots, G_{2002}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și $\mathbb{Q} = G_1 \cup \ldots \cup G_{2002}$, atunci există $i \in \{1, \ldots, 2002\}$ astfel încât $G_i = \mathbb{Q}$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^{2002}$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(f'\left(\frac{1}{n}\right) + f'\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f'\left(\frac{n}{n}\right) \right)$

(2p) d) Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că pentru orice $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ avem $\left(x - \frac{k}{n} \right) \cdot f'\left(\frac{k-1}{n} \right) \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n} \right) \leq \left(x - \frac{k}{n} \right) \cdot f'\left(\frac{k}{n} \right)$, $\forall n \geq 2$ și $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(4p) e) Integrând inegalitățile de la punctul d), să se arate că, $\forall n \geq 2$ și $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $-\frac{1}{2n^2} \cdot f'\left(\frac{k-1}{n} \right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n} \right) \leq -\frac{1}{2n^2} \cdot f'\left(\frac{k}{n} \right)$.

(2p) f) Adunând inegalitățile de la punctul e), să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 5

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, elementul $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ și mulțimile $A = \{g(a) \mid g \in \mathbf{Z}[X]\}$, $B = \{g(a) \mid g \in \mathbf{Z}[X], \text{grad}(g) \leq 3\}$.

(3p) **1.** Care dintre elementele următoare ***nu*** este rădăcină a polinomului f?
a) $-\sqrt{2}+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; c) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$; d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(3p) **2.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

(3p) **3.** Cât este produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$?

(3p) **4.** Dacă $p\sqrt{2} + q\sqrt{5} + r\sqrt{10} + s = 0$, cu $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$, cât este $2p + 5q + 10r + s$?

(3p) **5.** Cât este $A - B$?

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$, derivata de ordinul n a functiei f, în punctul x.

(3p) **6.** Care este perioada funcției f?

(3p) **7.** Câte puncte de maxim local are funcția f în intervalul $[0; 11\pi]$?

(3p) **8.** Care este aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2\pi$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x |f(t)|\,dt}{x}$?

(3p) **10.** Care este lungimea maximă a unui interval inclus în $[0; 2\pi]$ pe care funcția f este convexă?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care sunt coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, unde $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$?

(4p) **12.** În câte puncte intersectează dreapta $y = x$ parabola $y^2 = 2x$?

(4p) **13.** Care este produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$?

(4p) **14.** Care este cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ și $\vec{w} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$?

Scanned with OKEN Scanner

(2p) **15.** Scrieți un număr complex care are argumentul în cadranul 3 și unul în cadranul 4.

(2p) **16.** Care este ecuația planului care trece prin punctele $A(1, 2, 3)$; $B(2, 1, 3)$; $C(3, 1, 2)$?

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, precum și sistemul $\begin{cases}x+y+z+t=1\\ y+z+t=0\\ z+t=0\end{cases}$, $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

(4p) a) Să se determine matricea sistemului.

(4p) b) Să se calculeze rangul matricei A.

(4p) c) Să se rezolve sistemul.

(4p) d) Să se calculeze suma elementelor matricei I_3A.

(2p) e) Să se arate ecuația $AX=I_3$, cu $X\in\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ are o infinitate de soluții.

(2p) f) Să se arate că ecuația $YA=I_3$, cu $Y\in\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ nu are soluție.

Subiectul IV (20p)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\frac{1}{2^{1^2}}+\frac{1}{2^{2^2}}+\frac{1}{2^{3^2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n^2}}$ și $b_n=a_n+\frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

(4p) b) Să se arate că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

(4p) c) Să se arate că șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt mărginite.

(4p) d) Să se arate că șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente și au aceeași limită.

(2p) e) Notăm cu $a\in\mathbb{R}$ limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Să se arate că numărul a este irațional.

(2p) f) Să se arate că nu există polinoamele nenule $f, g\in\mathbb{R}[X]$ cu proprietatea că $a_n=\frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 6

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Pentru ce valori complexe ale lui a, b și c are loc egalitatea $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$?

(3p) **2.** Care este numărul de soluții complexe ale ecuației $(x^2-x+2)^3 = x^6-x^3+8$?

(3p) **3.** Care este suma soluțiilor reale ale ecuației $(2^x-3^x+5^x)^3 = 8^x-27^x+125^x$?

Se consideră polinomul $f = X^4-3X+1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **4.** Cât este suma $x_1+x_2+x_3+x_4$?

(3p) **5.** Cât este produsul $f(1)f(-1)$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

(3p) **6.** Care este suma soluțiilor ecuației $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Care este numărul soluțiilor ecuației $f'(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **8.** Care este numărul punctelor de extrem local ale funcției f?

(3p) **9.** Cât este $f(x) - (x^2 - 5x + 5)^2$?

(3p) **10.** Care este valoarea minimă a funcției f pe $\mathbb{R}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 100$, care trece prin $A(8, 6)$?

(4p) **12.** Care este distanța de la punctul $A(1, 1, 1)$ la planul $x + y + z = 0$?

(4p) **13.** Care este cel mai mic element din mulțimea $\{\cos 1°, \cos 2°, \ldots, \cos 89°\}$?

(4p) **14.** Scrieți un vector perpendicular pe vectorul $2\vec{i}+3\vec{j}$.

(2p) **15.** Câte soluții complexe nereale are ecuația $x^{2004}=1$?

(2p) **16.** În câte puncte intersectează dreapta $y = x$ elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

(4p) b) Să se arate că ecuația $X^2=O_2$ are 4 soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

(4p) c) Să se arate că inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ au 6 elemente inversabile față de înmulțire.

(4p) d) Să se găsească două matrice $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ pentru care $AB\neq BA$.

(2p) e) Să se găsească o matrice $C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ pentru care $C^3=I_2$, iar $C\neq I_2$.

(2p) f) Să se demonstreze că $\forall\, X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ avem $X^8=X^2$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ și integralele $I_n(p)$ unde $n,p\in\mathbb{N}^*$, $I_n(p)=\int_0^1(1-x^p)^n\,dx$.

(4p) a) Să se calculeze $I_1(p)=\int_0^1(1-x^p)\,dx$.

(4p) b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n(p)=\frac{np}{np+1}I_{n-1}(p)$, $\forall\, n\geq 2$, $n,p\in\mathbb{N}^*$.

(2p) c) Deduceți că $I_n(n)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) d) Să se calculeze $f'(x)$, $x>0$.

(2p) e) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, $\forall\, x>0$.

(2p) f) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$.

(2p) g) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 7

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, ..., 8\}$.

(3p) **1.** Care este media aritmetică a elementelor mulțimii M ?

(3p) **2.** Care este numărul de submulțimi cu șase elemente ale mulțimii M ?

(3p) **3.** Care este numărul total de submulțimi ale mulțimii M ?

(3p) **4.** Care este numărul de elemente ale mulțimii $\{(a,b) \mid a,b \in M, a<b, a \text{ divide pe } b\}$?

(3p) **5.** Câte progresii aritmetice de trei elemente cu rația strict pozitivă se pot forma cu elementele mulțimii M?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+x)$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$, derivata de ordinul n a funcției f în punctul x.

(3p) **6.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **7.** Care este ecuația asimptotei la graficul funcției f către $-\infty$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f ?

(3p) **9.** Câte elemente are mulțimea $\{n\in\mathbb{N}^* \mid f^{(n)}(x)=e^x(x^2+(2n+1)x+n^2), \forall x\in\mathbb{R}\}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(0)+f''(0)+...+f^{(n)}(0)}{n^3}$?

Subiectul II (20p)

Se consideră un triunghi ABC cu lungimile laturilor de 3, 4 si 5.

(4p) **11.** Cât este măsura unghiului care se opune laturii egale cu 5?

(4p) **12.** Cât este raza cercului circumscris triunghiului ABC?

(4p) **13.** Cât este aria triunghiului ABC?

(4p) **14.** Cât este suma cosinusurilor unghiului triunghiului ABC?

(2p) **15.** Cât este suma înălțimilor triunghiului ABC?

(2p) **16.** Cât este raza cercului înscris în triunghiul ABC?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, iar $S_0 = 3$.

(4p) a) Să se calculeze $f(-1)f(1)$.

(4p) b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.

(4p) c) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f' sunt reale.

(4p) d) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + x_3$.

(2p) e) Să se arate că $S_{k+3} - 4S_{k+1} + S_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $S_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră integralele I_n, $n \in \mathbb{N}$, unde $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ și

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx, \forall n \geq 1$ și șirul $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $w_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}, \forall n \geq 1$.

(4p) a) Să se calculeze I_0.

(4p) b) Să se calculeze I_1.

(4p) c) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(2p) d) Să se deducă inegalitățile $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.

(2p) f) Știind că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} w_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 8

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Notăm cu n cel mai mic număr natural nenul, pentru care $(AB)^n=O_3$ și cu p cel mai mic număr natural nenul, pentru care $(BA)^p=O_3$.

(3p) **1.** Cât este determinantul matricei A ?

(3p) **2.** Cât este rangul matricei A adunat cu rangul matricei B ?

(3p) **3.** Cât este suma elementelor matricei AB ?

(3p) **4.** Cât este numărul $n-p$?

(3p) **5.** Cât este numărul $n\cdot p$?

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(3p) **6.** Cât este I_0 ?

(3p) **7.** Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}^*$ este adevărată egalitatea $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$?

(3p) **9.** Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}^*$ este adevărată egalitatea $nI_n=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$? (Se poate utiliza eventual metoda de integrare prin părți).

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este numărul maxim de plane care trec prin câte 3 puncte dintr-o mulțime de 10 puncte?

(4p) **12.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1, 1, 1)$ și $B(2, 2, 2)$?

(4p) **13.** Care este distanța dintre punctele $A(1, 0, 0)$ și $B(2, 5, 1)$?

(4p) **14.** Cât este $a\in\mathbb{R}$ pentru ca planele $x+y+z=1$ și $x+ay-z=0$ să fie perpendiculare?

Scanned with OKEN Scanner

(2p) **15.** În câte puncte intersectează drepta $x = -2y$ hiperbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$?

(2p) **16.** Care este produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ și $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$?

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(4p) a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

(4p) b) Să se calculeze $f(1)f(-1)$.

(4p) c) Să se arate că polinomul f nu au rădăcini raționale.

(4p) d) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

(2p) e) Să se arate că dacă $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, atunci $f(x) \notin \mathbb{Z}$.

(2p) f) Să se demonstreze că există o infinitate de elemente $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x) \in \mathbb{N}$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$ și $g(x) = \sin(x^2)$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n a funcției f în punctul x.

(2p) a) Să se calculeze $f^{(5)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se verifice că $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(5)}(0) = 0$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^7}$.

(4p) d) Să se arate că $f^{(5)}(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) e) Să se arate că $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $\forall x \geqslant 0$.

(4p) f) Să se demonstreze că aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției g, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$ este un număr din intervalul $(0{,}30;\ 0{,}32)$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 9

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte numere de 3 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **2.** Cât este suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$?

(3p) **3.** Cât este produsul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\hat{6}$ în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$?

(3p) **4.** Câte soluții are ecuația $2^{x^2}=2^x$ în mulțimea numerelor reale?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ să fie număr par?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+1$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\dfrac{\pi}{2}$?

(4p) **12.** Cât este $\cos\pi$?

(4p) **13.** Dacă $\vec{v}_1=2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}_2=3\vec{i}+2\vec{j}$, cât este $\vec{v}_1+\vec{v}_2$?

(4p) **14.** Care este distanța de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta d: $x + y + 1 = 0$, în sistemul cartezian xOy?

(2p) **15.** Câte numere complexe de modul 1 există?

(2p) **16.** Care este ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 25$ care trece prin punctul $A(3, 4)$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$, care verifică proprietățile $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ și $f(1) = 1$.

(4p) a) Să se verifice că $f(0) = 0$.

(4p) b) Să se verifice că $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall\, x, y \in \mathbb{N}^*$ și $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, avem
$f(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$.

(4p) d) Să se arate că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) e) Să se arate că $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{Q}$.

(2p) f) Utilizând eventual faptul că, pentru orice $a < b \in \mathbb{R}$, există $r \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a < r < b$, să se arate că $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{2}{3}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ și

$g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{5}{3}\right) + \ln\left(x + \frac{2}{3}\right)$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x > 0$.

(4p) b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(4p) c) Să se verifice că $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$ și $g'(x) < 0$, $\forall x > 0$.

(4p) d) Uitlizând rezultatele de la punctele b) și c), să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall\, x > 0$.

(2p) e) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător și șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

(2p) f) Să se arate că $0 < b_n - a_n < \frac{1}{6n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 10

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Cât este $\hat{3}^4$ în corpul $(\mathbb{Z}_5^*, +, \cdot)$?

(3p) **2.** Câte soluții are ecuația $\ln^2(x) = \ln(x)$ în mulțimea $(0, \infty)$?

(3p) **3.** Cât este C_5^4?

(3p) **4.** Cât este suma $1 + 2 + 3 + ... + 20$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie divizibil cu 3 ?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **9.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **10.** Cât este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin^2 \dfrac{\pi}{2005} + \cos^2 \dfrac{\pi}{2005}$?

(4p) **12.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 6\vec{j}$ să fie paraleli?

(4p) **13.** Un triunghi ABC are laturile $AB = 4$, $BC = 5$ și $AC = 6$. Cât este $\cos B$?

(4p) **14.** Care este aria triunghiului ABC, dacă $A(1, 1, 1)$; $B(2, 2, 2)$ și $C(1, 1, 2)$?

(2p) **15.** Dacă $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, câte elemente are $U_4 \cap U_6$?

(2p) **16.** Care este suma elementelor mulțimii U_{10}?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm prin $\overline{X}$, matricea $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$, unde $\overline{z}$ desemnează conjugatul numărului complex z. Considerăm funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $f(X) = \overline{X}$. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversabilă, definim funcția $g_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $g_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(4p) a) Să se verifice că $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ și $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

(4p) b) Să se arate că $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ și $f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(4p) c) Să se arate că $(f \circ f)(X) = X$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(3p) d) Să se arate că funcția f este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

(3p) e) Să se arate că funcția g_A este bijectivă, $g_A(X+Y) = g_A(X) + g_A(Y)$ și $g_A(X \cdot Y) = g_A(X) \cdot g_A(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(2p) f) Să se arate că funcția f are proprietatea că $f \neq g_A$, pentru orice matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = e^x$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se verifice $f_1(x) = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$f_{n+1}(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Reamintim că $0! = 1$ și convenim că $x^0 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

(2p) d) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

(2p) e) Să se arate că $0 < f_n(x) \leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$.

(2p) f) Să se arate că funcția f_n este convexă pe intervalul $(0, \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2p) g) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 11

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Care este restul împărțirii polinomului $X^5 - 1$ la polinomul $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$?

(3p) **2.** Câte submulțimi cu 2 elemente are o mulțime cu 5 elemente?

(3p) **3.** Cât este suma $\hat{1} + \hat{2} + ... + \hat{6}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7, +)$?

(3p) **4.** Care este probabilitatea ca un element al inelului $\mathbb{Z}_{10}$ să fie inversabil față de înmulțire?

(3p) **5.** Câte soluții reale are ecuația $2^x = 3^x$?

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Care este aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **10.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\dfrac{\pi}{3}$?

(4p) **12.** Dacă $\cos x = 0{,}7$, cât este $\cos(x + \pi)$?

(4p) **13.** Care este aria unui triunghi cu laturile având lungimile 3, 4, 5?

(4p) **14.** Cât este $(1 - i)^{2004}$?

(2p) **15.** Câte triunghiuri se pot forma utilizând segmente de lungimi diferite, cu lungimile din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$?

(2p) **16.** Un triunghi are măsurile unghiurilor A, B, C în progresie aritmetică. Ce măsură are unghiul B?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) b) Dacă $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ și $Y=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, să se calculeze matricea $S=A-X\cdot Y$.

(4p) c) Să se verifice că $A^2=10A$.

(4p) d) Să se arate că matricea B este inversabilă și inversa sa este matricea $B^{-1}=I_3-\frac{1}{11}A$.

(2p) e) Să se găsească trei matrice $U, V, W\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de rang 1, astfel încât $B=U+V+W$.

(2p) f) Să se arate că oricare ar fi două matrice, $C, D\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de rang 1, avem $C+D\neq B$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $f_0(x)=1-\cos x$ și $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) a) Să se verifice $f_1(x)=x-\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$f_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots+(-1)^n\frac{x}{1!}+(-1)^{n+1}\sin x,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(2p) d) Să se arate că graficul funcției f_1 nu are asimptotă către ∞.

(2p) e) Să se arate că $0\leqslant f_n(x)\leqslant 2\cdot\frac{x^n}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x>0$. (Reamintim că $0!=1$).

(2p) f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$, $\forall x>0$.

(2p) g) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 12

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte elemente din mulțimea $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ se divid cu 2 sau cu 3?

(3p) **2.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, să fie număr prim?

(3p) **3.** Câte elemente inversabile față de înmulțire are inelul $\mathbb{Z}_9$?

(3p) **4.** Câte elemente de ordinul 5 are grupul $(\mathbb{Z}_5, +)$?

(3p) **5.** Câte funcții bijective definite pe mulțimea $\{1, 2, 3\}$ cu valori în mulțimea $\{4, 5, 6\}$, există?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - x|$.

(3p) **6.** Câte puncte de discontinuitate are funcția f?

(3p) **7.** În câte puncte nu este derivabilă funcția f?

(3p) **8.** Care este aria suprafeței plane conținută între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$?

(3p) **9.** Cum este funcția f pe intervalul $(0; 1)$: convexă sau concavă?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1)\cdot ... \cdot f(n))$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\cos1° + \cos2° + ... + \cos179°$?

(4p) **12.** Care dintre numerele următoare $\cos\frac{\pi}{5}$ sau $\cos\frac{2\pi}{5}$ este mai mare?

(4p) **13.** Care este ecuația planului care trece prin punctele $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$?

(4p) **14.** Care sunt coordonatele punctului de intersecție al dreptelor $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ și $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$?

(2p) **15.** Care este partea imaginară a numărului $\frac{1}{2+3i}$?

(2p) **16.** Cât este $\sin\frac{\pi}{6}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$ distincte și $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ arbitrare, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Definim polinoamele $w_1 = \frac{(X-a_2)(X-a_3)...(X-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)}$,

$w_2 = \frac{(X-a_1)(X-a_3)...(X-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)}$, ..., $w_n = \frac{(X-a_1)(X-a_2)...(X-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1})}$ și $L_n = b_1w_1 + b_2w_2 + ... + b_nw_n$.

(4p) a) Să se verifice că $w_i(a_j) = 0$, $\forall\, i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

(4p) b) Să se verifice că $w_1(a_1) = w_2(a_2) = ... = w_n(a_n) = 1$.

(4p) c) Să se verifice că grad $(w_1) = ... = \text{grad}(w_n) = n - 1$.

(4p) d) Să se arate că polinomul L_n are gradul cel mult $n - 1$ și $L_n(a_k) = b_k$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

(2p) e) Să se arate că dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, grad$(f) \leq n - 1$ și $f(a_k) = b_k$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$, atunci $f = L_n$.

(2p) f) Să se arate că $(17a_1 + 11)w_1 + (17a_2 + 11)w_2 + ... + (17a_n + 11)w_n = 17X + 11$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

(4p) b) Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, 1)$ și $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (1, \infty)$.

(4p) c) Să se deducă inegalitatea $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $\forall\, x > 0$.

(2p) d) Alegând $x = \frac{a}{b}$, cu $a, b > 0$ și notând $\beta = 1 - \alpha$, să se arate că $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$, $\forall\, a, b > 0$ și $\forall\, \alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

(2p) e) Să se arate că $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$, $\forall x, t > 0$ și $\forall\, p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(2p) f) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că, dacă $a_1, ..., a_n$ și $b_1, ..., b_n$ sunt numere reale strict pozitive, $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci $a_1b_1 + ... + a_nb_n \leq (a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$.

(2p) g) Să se demonstreze că, dacă $h, g : [0, 1] \to (0, \infty)$ sunt două funcții continue și $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci

$$\int_0^1 h(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 13

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte numere de 3 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **2.** Cât este suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$?

(3p) **3.** Cât este produsul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\hat{6}$ în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$?

(3p) **4.** Câte soluții are ecuația $2^{x^2}=2^x$ în mulțimea numerelor reale?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ să fie număr par?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+1$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\dfrac{5\pi}{6}$?

(4p) **12.** Câte puncte $A(a, b)$ cu $a, b\in\mathbb{Z}$ se află pe cercul de ecuație $x^2+y^2=1$?

(4p) **13.** Câte numere naturale $n\in\mathbb{N}$ verifică relația $\sin n=0$?

(4p) **14.** Care este volumul tetraedrului $OABC$, unde $O(0, 0, 0)$; $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$?

(2p) **15.** Care este produsul elementelor mulțimii U_{10}?

(2p) **16.** Care este distanța de la punctul $A(1, 1, 1)$ la dreapta $x+y=0$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ precum și submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\}$, unde prin $\overline{z}$ am notat conjugatul numărului complex z.

(4p) a) Să se verifice că $I_2 \in G$ și $O_2 \in G$.

(4p) b) Să se arate că, dacă $z, w \in \mathbb{C}$ și $|z|^2 + |w|^2 = 0$, atunci $z = w = 0$.

(2p) c) Să se arate că, dacă $P, Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.

(2p) d) Să se arate că, dacă $D \in G$, $D \neq O_2$, atunci D este matrice inversabilă și $D^{-1} \in G$.

(4p) e) Să se găsească o matrice $X \in G$, cu proprietatea că $XC \neq CX$, unde $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

(2p) f) Să se arate că, dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

(2p) g) Să se arate că mulțimea $H = G - \{O_2\}$, împreună cu operația de înmulțire a matricelor, determină o structură de grup necomutativ.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x) - x$ și șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{2004 + x^n} dx$, $\forall n \geq 1$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > -1$.

(4p) b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

(4p) c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

(4p) d) Să se arate că $0 \leq \ln(1 + x) \leq x$, $\forall x \geq 0$.

(2p) e) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \ln \frac{2005}{2004} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{2004}\right) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 14

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Cât este $\hat{3}^4$ în corpul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$?

(3p) **2.** Câte soluții are ecuația $\ln^2(x) = \ln(x)$ în mulțimea $(0, \infty)$?

(3p) **3.** Cât este C_5^4?

(3p) **4.** Cât este suma $1 + 2 + 3 + ... + 20$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie divizibil cu 3 ?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **9.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **10.** Cât este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\cos\dfrac{5\pi}{6}$?

(4p) **12.** Care este ecuația planului care trece prin punctele $A(1, 1, 1)$; $B(2, 1, 0)$ și $C(0, 1, 2)$?

(4p) **13.** Care este ecuația dreptei AB, dacă $A(1, 2, 3)$; $B(3, -2, 1)$?

(4p) **14.** Care este modulul numărului $(1 + i)^{100}$?

(2p) **15.** Care este distanța cea mai mare dintre două puncte ale unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile de 2, 3 și 4?

(2p) **16.** Într-un triunghi ABC, $\cos B = \dfrac{3}{5}$ și $\cos C = \dfrac{4}{5}$. Cât este $\cos A$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $f(X)=X^3$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) b) Să se calculeze A^2 și A^3.

(4p) c) Să se arate că, dacă $Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $YA=AY$, atunci există $a, b, c\in\mathbb{C}$, astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$.

(4p) d) Să se arate că, dacă $Z=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$ unde $a, b, c\in\mathbb{C}$ și $\det(Z)=0$, atunci $Z^3=O_3$.

(2p) e) Să se găsească două matrice $U\neq V\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $f(U)=f(V)$.

(2p) f) Să se demonstreze că ecuația $f(X)=A$ nu are soluții în mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n=\int_0^1(x-x^2)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se calculeze I_1.

(4p) b) Să se arate că $0\leqslant x-x^2\leqslant\frac{1}{4}$, $\forall x\in[0,1]$.

(4p) c) Să se deducă inegalitățile $0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{4^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) d) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant 2$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}<\sqrt{\frac{3}{2n+3}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se arate că $I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) g) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}4^n I_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 15

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte numere de 2 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2, 3\}$?

(3p) **2.** Cât este suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}$ în $\mathbf{Z}_7$?

(3p) **3.** Cât este produsul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\hat{5}$ în $\mathbf{Z}_6$?

(3p) **4.** Câte soluții are ecuația $3^{x^2}=3$ în mulțimea numerelor reale?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie număr impar?

Se consideră funcția $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este numărul maxim de drepte ce se pot obține unind câte 2 puncte dintr-o mulțime formată din 10 puncte?

(4p) **12.** Câte numere naturale $n\in\mathbb{N}$ verifică relația $\sin n>0$?

(4p) **13.** Dacă $U_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\}$, care este suma elementelor mulțimii $U_{12}\cap U_{16}$?

(4p) **14.** Care este volumul unei sfere de rază 1?

(2p) **15.** Care este ecuația tangentei la elipsa $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{49}=1$ în punctul $A(4, 0)$?

(2p) **16.** În câte puncte intersectează dreapta $y=x$ elipsa $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $S_0 = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ și $\Delta = \det(A \cdot A^T)$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A.

(4p) a) Să se verifice că $S_1 = 0$ și $S_2 = -2a$.

(4p) b) Să se arate că $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4p) c) Să se calculeze S_3 și S_4 numai în funcție de a și b.

(4p) d) Să se verifice că $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$.

(2p) e) Să se calculeze Δ numai în funcție de a și b.

(2p) f) Știind că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, să se arate că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(4p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(4p) e) Să se arate că funcția f este bijectivă.

(4p) f) Dacă notăm cu $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcției f, să se calculeze $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} g(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 16

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte submulțimi are o mulțime cu 5 elemente?

(3p) **2.** Câte soluții are ecuația $\hat{2}x = \hat{4}$ în inelul $\mathbf{Z}_8$?

(3p) **3.** Care este probabilitatea ca, alegând un element din inelul $\mathbf{Z}_6$, acesta să fie inversabil față de înmulțire?

(3p) **4.** Câte funcții se pot defini pe o mulțime cu 3 elemente cu valori într-o mulțime cu 2 elemente?

(3p) **5.** În câte moduri se pot permuta 4 elemente distincte?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2004}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **9.** Care este numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f?

(3p) **10.** Care este numărul punctelor de extrem local ale funcției f?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este aria triunghiului ABC, unde $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$?

(4p) **12.** Care este distanța de la punctul $O(0, 0, 0)$ la planul care trece prin punctele $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$?

(4p) **13.** Care este ecuația planului determinat de dreptele $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ și $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$?

(4p) **14.** Dacă $\sin x = \dfrac{1}{2}$, cât este $\cos 2x$?

(2p) **15.** Care este produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ și $\vec{w} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$?

(2p) **16.** Scrieți un vector perpendicular pe vectorul $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\mid XA=AX\}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) b) Să se calculeze matricele A^2 și A^3.

(4p) c) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

(4p) d) Să se arate că, dacă $U, V\in C(A)$, atunci $U\cdot V\in C(A)$, atunci $U\cdot V\in C(A)$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $X\in C(A)$, atunci există $a, b, c\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$.

(2p) f) Să se arate că, dacă $Y\in C(A)$ și $Y^3=O_3$, atunci $Y=O_3$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(4p) a) Să se verfice că $f(x+2\pi)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(3p) b) Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

(4p) c) Să se arate că $\frac{1}{4}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(3p) d) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(2p) e) Să se verifice că $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $\forall x\in[0,\pi)$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.

(2p) g) Să se arate că graficul funcției F nu are asimptotă către $+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 1

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = X^4 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este expresia $f - \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$?

(3p) **2.** Care este mulțimea $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \frac{1}{2}\right\}$?

(3p) **3.** Care este numărul de rădăcini reale ale polinomului f?

(3p) **4.** Cât este $a \in \mathbb{C}$ pentru care avem identitatea $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$?

(3p) **5.** Cât este produsul $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

(3p) **6.** Cât este expresia $f(x) - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Care este ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f?

(3p) **8.** Cât este suma $f(1) + f(2) + \ldots + f(2004)$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 f(x)$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Într-un triunghi $\cos(A) = \frac{1}{2}$. Cât este $\sin A$?

(4p) **12.** Cât este $a + b$, pentru ca planele $x + y + z = 1$ și $x + ay + bz = 0$ să fie paralele?

(4p) **13.** În câte puncte intersectează drepta $x + y = 0$ cercul $x^2 + y^2 = 25$?

(4p) **14.** Care este cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$?

(2p) **15.** Câte soluții reale are ecuația $z^4 = i$?

(2p) **16.** Cât este i^{2005}?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ precum și submulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) b) Să se verifice că $I_2\in G$ și că $A\in G$.

(4p) c) Să se arate că $XA^2=A^2X$, $\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(4p) d) Să se găsească o matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB\neq BA$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $a, b\in\mathbb{C}$, atunci $aI_2+bA\in G$.

(2p) f) Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=xI_2+yA$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^x$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f^{(n)}(x)=e^x\cdot(x^2+2nx+n(n-1))$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
(S-a notat prin $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcției f).

(2p) c) Să se arate că $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(4p) d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(0)+f''(0)+\ldots+f^{(n)}(0)}{n^3}$.

(4p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(2p) f) Să se găsească o funcție $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indefinit derivabilă, cu proprietatea că $g^{(n)}(0)=n(n+1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 2

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen*

Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie "$\circ$" prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

(3p) **1.** Cât este $x \circ y - (x+2)(y+2) + 2$, $x, y \in \mathbb{R}$?

(3p) **2.** Pentru ce valori ale lui $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$?

(3p) **3.** Care este mulţimea $\{(a, b) \in (\mathbb{Q} - \mathbf{Z}) \times (\mathbb{Q} - \mathbf{Z}) \mid a \circ b \in \mathbb{N}\}$?

(3p) **4.** Câte soluţii are ecuaţia $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -2$, $x \in (0, \infty)$?

(3p) **5.** Câte elemente are mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid 2^x \circ 3^x = -2\}$?

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

(3p) **6.** Cât este expresia $f(x) - \dfrac{1}{(x+1)} + \dfrac{1}{(x+2)}$, $x \in [0, \infty)$?

(3p) **7.** Care este $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$?

(3p) **8.** Care este asimptota la graficul funcţiei f către $+\infty$?

(3p) **9.** Care este valoarea sumei $f(1) + f(2) + \ldots + f(2004)$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este conjugatul numărului complex $z = 5 + 6i$?

(4p) **12.** În ce cadran se află afixul numărului $z = 5 - 6i$?

(4p) **13.** Care este ecuaţia cercului cu centrul $C(1, 2)$ şi de rază 2?

(4p) **14.** În câte puncte intersectează drepta $x + y = 0$ parabola $x^2 = 2y$?

(2p) **15.** Scrieţi ecuaţia unei drepte perpendiculare pe dreapta $x + y = 0$.

(2p) **16.** Care este cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a^2-3b^2=1,\ a,b\in\mathbb{Q}\right\}.$$

(4p) a) Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$.

(4p) b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

(4p) c) Să se arate că, dacă $X\in G$, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă și că $X^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$.

(4p) d) Să se găsească o matrice $A\in G$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $b\neq 0$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $B\in G$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $a>0$, $b>0$, atunci $B^n\neq I_2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se arate că mulțimea G este infinită.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $g(x)=\operatorname{arctg} x-x$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a_0=1$ și $a_{n+1}=f(a_n)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și că funcția g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

(4p) c) Să se arate că $g(x)=0$ dacă și numai dacă $x=0$.

(2p) d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător și mărginit.

(4p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 3

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f=(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este $f(0)$?

(3p) **2.** Cât este $f-(X^2-5X+5)^2$?

(3p) **3.** Care este numărul de rădăcini reale ale polinomului f?

(3p) **4.** Cât este produsul $x_1x_2x_3x_4$?

(3p) **5.** Cât este suma $x_1+x_2+x_3+x_4$?

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

(3p) **6.** Care este asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f?

(3p) **7.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **8.** Care este cel mai mic număr real a, cu proprietatea că $f(x)<a$, $\forall x\in\mathbb{R}$?

(3p) **9.** Care este aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}((f(x)-1)x^2)$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** În câte puncte intersectează drepta $x+y=0$ parabola $y^2=2x$?

(4p) **12.** Scrieţi ecuaţia unei drepte perpendiculare pe dreapta $x-y+1=0$.

(4p) **13.** Care este produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$ şi $\vec{w}=\vec{j}-\vec{k}$?

(4p) **14.** Cât este $(1+i)^{2004}$?

(2p) **15.** Care este aria triunghiului ABC, dacă $AB=3$, $AC=4$ şi $\cos(\hat{A})=\dfrac{1}{2}$?

(2p) **16.** Dacă AD este o mediană a unui triunghi şi G este centrul de greutate al triunghiului cât este raportul $\dfrac{GA}{GD}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ precum și submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in (0, \infty), b \in \mathbb{R} \right\}$.

(4p) a) Să se verifice că matricea $I_2 \in G$.

(4p) b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

(4p) c) Să se arate că, dacă $C \in G$, atunci există $D \in G$ astfel încât $CD = DC = I_2$.

(4p) d) Să se găsească două matrice $S, T \in G$ pentru care $ST \neq TS$.

(4p) e) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $A \in G$ și $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, există o matrice $X \in G$ astfel încât $X^n = A$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x) - x$ și $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$.

(4p) a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x}{1+x}$ și $g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $\forall\, x > -1$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(0)$ și $g'(0)$.

(4p) c) Să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall\, x > 0$.

(4p) d) Să se arate că $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{2n-1}{n^2}\right) \right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 4

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este expresia $f - (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$?

(3p) **2.** Care este numărul de rădăcini reale are polinomul f?

(3p) **3.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

(3p) **4.** Cât este produsul $x_1x_2x_3x_4$?

(3p) **5.** Câți divizori neconstanți, de grad cel mult 3, are polinomul f în $\mathbb{Q}[X]$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^3}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Care este ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 f'(x)\,dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Scrieți ecuația unei drepte paralelă cu dreapta $x + y = 0$.

(4p) **12.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 6\vec{j}$ să fie paraleli?

(4p) **13.** Care este cel mai mic element din mulțimea {sin1°, sin2°, ..., sin89°}?

(4p) **14.** Un poligon regulat are un unghi de 108°. Câte laturi are poligonul?

(2p) **15.** În ce cadran este argumentul numărului complex $z = 2 + 3i$?

(2p) **16.** Un triunghi isoscel are măsura unghiului A de 120°. Care este măsura unghiului B?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a^2-2b^2=1,\ a, b\in\mathbb{Q}\right\}.$$

(4p) a) Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$.

(4p) b) Să se arate că, dacă $A, B\in G$, atunci $AB\in G$.

(4p) c) Să se arate că, dacă $X\in G$, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ atunci X este matrice inversabilă și $X^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}\in G$.

(4p) d) Să se găsească o matrice $A\in G$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $b\neq 0$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $B\in G$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a>0, b>0$, atunci $B^n\neq I_2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se arate că mulțimea G este infinită.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln a-a\ln x$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x), x>0$.

(4p) b) Să se calculeze $f(a)$ și $f'(a)$.

(2p) c) Utilizând teorema lui *Fermat* să se determine $a>0$ cu $f(x)\geq 0, \forall x\in(0,\infty)$.

(4p) d) Să se arate că $e^x\geq x^e, \forall x\in(0,\infty)$.

(4p) e) Să se arate că pentru $x>0$, avem $e^x=x^e$ dacă și numai dacă $x=e$.

(2p) f) Să se determine numerele reale $c, b>0$ cu $c^x+b^x\geq x^c+x^b, \forall x\in(0,\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 5

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = X^4 - 5X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Câte soluții reale are ecuația $x^2 - 5x + 1 = 0$?

(3p) **2.** Câte rădăcini reale are polinomul f ?

(3p) **3.** Câte rădăcini raționale are polinomul f ?

(3p) **4.** Cât este $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

(3p) **5.** Cărei mulțimi aparține suma $x_1^{2003} + x_2^{2003} + x_3^{2003} + x_4^{2003}$?

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0(x) = 1$ și $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3p) **6.** Cât este $I_0(1) + I_0(2) + \ldots + I_0(2003)$?

(3p) **7.** Cât este $I_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **8.** Cât este $I_{10}(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_0(1) + I_1(1) + \ldots + I_n(1)}{n}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Cât este suma $\sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 359°$?

(4p) **12.** Cât este produsul $\sin(-89°) \cdot \sin(-88°) \cdot \ldots \cdot \sin 88° \cdot \sin 89°$?

(4p) **13.** Cât este $(2 + 3i)^2$?

(4p) **14.** În câte puncte intersectează drepta $3x + 2y = 0$ elipsa $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$?

(2p) **15.** Scrieți o valoare a radicalului $\sqrt[3]{1}$ în $\mathbb{C}$, diferită de 1.

(2p) **16.** Care dintre numerele următoare este mai mare $\sin\dfrac{\pi}{5}$ sau $\sin\dfrac{3\pi}{5}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze A^2.

(4p) b) Să se calculeze $\det(A)$.

(4p) c) Să se determine rangul matricei A.

(4p) d) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

(2p) e) Să se arate că ecuația $Y^2 = A$ nu are nici o soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(2p) f) Să se arate că ecuația $Z^2 = O_2$ are în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o infinitate de soluții.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}$, $g(x)=f(x)-\frac{x^5}{5}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\operatorname{arctg}x$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}$.

(4p) c) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) d) Să se verifice că $f'(0) = g'(0) = 0$.

(2p) e) Să se arate că $x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$, $\forall\, x>0$.

(2p) f) Să se demonstreze că aria suprafeței plane mărginite de axa Ox, graficul funcției h și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este un număr cuprins în intervalul (0,41; 0,45).

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 6

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Pe $\mathbb{R}$ se considera legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + 1$. Se știe că legea este asociativă.

(3p) **1.** Care este elementul neutru al legii „$\circ$" ?

(3p) **2.** Care este simetricul elementului $x \in \mathbb{R}$, față de legea „$\circ$" ?

(3p) **3.** Cât este elementul $(-10) \circ (-9) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 10$?

(3p) **4.** Câte soluții reale are ecuația $4^x \circ 2^x = 21$?

(3p) **5.** Cât este suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-2} \circ \sqrt{3-x} = 2$?

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-1, -2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

(3p) **6.** Câte asimptote verticale are graficului funcției f ?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $f(x) - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, -2\}$?

(3p) **9.** Care este mulțimea valorilor lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Câte soluții ale ecuației $z^4 = i$ au argumentul în cadranul I?

(4p) **12.** În câte puncte intersectează drepta $x = 2y$ elipsa $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

(4p) **13.** Câte elemente din mulțimea {cos0°, cos1°, ..., cos179°, cos180°} sunt strict negative?

(4p) **14.** Care este aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile de 2, 3 și 4?

(2p) **15.** Care este modulul numărului complex $\dfrac{1}{2+3i}$?

(2p) **16.** Care este lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic cu catetele egale cu b și c?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze matricea $AB-BA$.

(4p) b) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) c) Să se calculeze matricea A^2.

(4p) d) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

(2p) e) Să se determine rangul matricei $X = I_2 + A + A^2 + ... + A^{2003}$.

(2p) f) Să se arate că $(AB)^n \neq I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\cos x$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ și $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) a) Să se calculeze $f_0(\pi)$.

(4p) b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x)$ nu există.

(4p) c) Să se calculeze $f_1(\pi)$.

(4p) d) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx$.

(2p) e) Să se determine $f_{10}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(2p) f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0(x)+f_1(x)+...+f_n(x)}{n}=0$, $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 7

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este suma $f(-1) + f(1)$?

(3p) **2.** Care este numărul rădăcinilor raţionale ale polinomului f?

(3p) **3.** Câte soluţii reale are ecuaţia $x^2 - 4x + 1 = 0$?

(3p) **4.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

(3p) **5.** Cât este produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

(3p) **6.** Câte dintre numerele $f(0{,}25)$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}75)$ şi $f(1)$, sunt egale cu $f(0)$?

(3p) **7.** Care este perioada principală a funcţiei f?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(3p) **9.** Câte puncte de discontinuitate are funcţia f?

(3p) **10.** Care este aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este lungimea razei cercului înscris unui triunghi dreptunghic cu catetele egale cu b şi c?

(4p) **12.** În câte puncte intersectează drepta $x = -y$ hiperbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$?

(4p) **13.** Care dintre numerele următoare este mai mare: cos1 sau sin1 ?

(4p) **14.** Care este modulul numărului $\frac{3+4i}{4+3i}$?

(2p) **15.** Care este volumul unui cub care are diagonala unei feţe egală cu $\sqrt{2}$?

(2p) **16.** Care este perimetrul unui triunghi echilateral care are aria $\frac{\sqrt{3}}{4}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se consideră legea de compoziție „$\square$“, definită prin $x \square y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Se mai consideră funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ și funcția $g:(0,\infty)\to(-1,1)$, $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(4p) a) Să se arate $(x \square y)\square z = x \square (y \square z)$, $\forall\, x, y, z \in G$.

(4p) b) Să se calculeze $(f \circ g)(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) c) Să se determine inversa funcției f.

(4p) d) Să se arate că $f(x \square y) = f(x) f(y)$, $\forall\, x, y \in G$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f(x_1 \square \ldots \square x_n) = f(x_1)\ldots f(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in G$.

(2p) f) Să se calculeze $\dfrac{1}{2}\square\dfrac{1}{4}\square\ldots\square\dfrac{1}{2000}\square\dfrac{1}{2002}$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $I_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $I_0(x)=1$ și $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(4p) a) Să se calculeze $I_0(1)+I_0(2)+\ldots+I_0(2003)$.

(4p) b) Să se determine $I_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) c) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcției $I_1(x)$.

(4p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $I_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$.

(2p) f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n}=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 8

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1–16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este suma $y_1 + y_2$?

(3p) **2.** Cât este restul împărţirii polinomului f la polinomul g ?

(3p) **3.** Cât este produsul $(X-1)f$?

(3p) **4.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

(3p) **5.** Cât este produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$?

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+x-1}{x^2+1}$.

(3p) **6.** Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2+1}$?

(3p) **7.** Care este ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f către $+\infty$?

(3p) **8.** Care este $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 f(x)\,dx$?

(3p) **10.** Care este mulţimea $\{x\in\mathbb{R} \mid f'(x)>0\}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este aria maximă a unui dreptunghi cu perimetrul 20?

(4p) **12.** Care este numărul maxim de drepte ce se pot obţine unind câte 2 puncte dintr-o mulţime de 5 puncte?

(4p) **13.** Care este partea imaginară a numărului $(1 - i)(1 - 2i)$?

(4p) **14.** Care dintre numerele următoare este mai mare: $\sin 10°$ sau $\cos 10°$?

(2p) **15.** Un pentagon are măsurile unghiurilor A, B, C, D, E în progresie aritmetică. Ce măsură are unghiul C?

(2p) **16.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 4\vec{j}$ să fie paraleli?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III–IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_3)$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ -\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix} \mid \hat{x},\hat{y}\in\mathbf{Z}_3\right\}$ și matricele $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii G.

(4p) b) Să se arate că dacă $\hat{x},\hat{y}\in\mathbf{Z}_3$ și $\hat{x}^2+\hat{y}^2=\hat{0}$, atunci $\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}$.

(4p) c) Să se arate că dacă $X, Y\in G$, atunci $XY\in G$.

(4p) d) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $A^n=I_2$.

(2p) e) Să se demonstreze că $G=\{O_2, I_2, A, \ldots, A^7\}$.

(2p) f) Să se calculeze $I_2\cdot A\cdot A^2\cdot\ldots\cdot A^7$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se calculeze I_0.

(4p) b) Să se verifice că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) c) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $nI_n=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) d) Să se arate că $I_{n+1}\leqslant I_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 9

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

Polinomul $f = X^2 + X + 1$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(3p) **1.** Care este restul împărţirii polinomului $X^3 - 1$ la polinomul f?

(3p) **2.** Cât este modulul rădăcinii x_1?

(3p) **3.** Cât este x_1^3 ?

(3p) **4.** Cât este S_3 ?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca S_n să fie egal cu 2 când $n \in \{1, 2, ..., 5\}$?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcţia f?

(3p) **10.** Care este aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = -1$ şi $x = 1$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\dfrac{\pi}{4}$?

(4p) **12.** Cât este $\cos 1° \cos 2° \cdot ... \cdot \cos 180°$.

(4p) **13.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 6\vec{j}$ să fie perpendiculari?

(4p) **14.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca dreptele de ecuaţii $x + y + 1 = 0$ şi $3x + ay + 5 = 0$ să fie paralele?

(2p) **15.** Scrieţi trei numere complexe de modul 1.

(2p) **16.** În câte puncte intersectează drepta $2x + 3y = 0$ cercul $x^2 + y^2 = 4$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20p)

Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b\in \mathbb{Z}\right\}$, precum și matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mai considerăm mulțimea $U(G)=\left\{A\in G \mid A \text{ este inversabilă și } A^{-1}\in G\right\}$.

(4p) a) Să se verifice că $O_2\in G$ și că $I_2\in U(G)$.

(4p) b) Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $A+B\in G$.

(4p) c) Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $A\cdot B\in G$.

(4p) d) Să se arate că dacă $A\in U(G)$, atunci $\det(A)=1$.

(2p) e) Să se arate că dacă $A\in U(G)$, atunci $A^4=I_2$.

(2p) f) Să se arate că dacă $A,B,C,D\in U(G)$ și $A\cdot B\cdot C\cdot D=I_2$, atunci printre matricele A, B, C și D există două care sunt egale.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+2^{-x}$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=f(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(4p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}$.

(2p) f) Să se rezolve în mulțimea $(0,\infty)$ ecuația $f(x)+f(x^{21})=f(x^2)+f(x^{1986})$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 10

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte soluţii are ecuaţia $\hat{x}^2 = \hat{x}$ în inelul $\mathbf{Z}_6$?

(3p) **2.** Câte elemente inversabile faţă de înmulţire are inelul $\mathbf{Z}_8$?

(3p) **3.** Cât este C_9^2?

(3p) **4.** Care este suma elementelor inelului $\mathbf{Z}_5$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element al mulţimii $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ să se dividă cu 3?

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^5}$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcţia f?

(3p) **10.** Cât este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Subiectul II (20p)

(4p) **201.** Cât este $\sin\dfrac{5\pi}{2}$?

(4p) **210.** Cât este $\cos\dfrac{7\pi}{6}$?

(4p) **31.** În ce cadran se află afixul numărului complex $1 - i$?

(4p) **58.** Un triunghi ABC are laturile $AB = 4$, $BC = 5$ şi $AC = 6$. Cât este $\sin B$?

(2p) **65.** Câte diagonale are un poligon convex cu 5 laturi?

(2p) **71.** Câte soluţii în $\mathbb{C}$ are ecuaţia $z^5 = 1$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20p)

În inelul matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) b) Să se rezolve sistemul $AX=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

(4p) c) Să se găsească o matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $B\neq O_2$ cu proprietatea $A\cdot B=O_2$.

(4p) d) Să se calculeze produsul $C\cdot A$, unde $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

(2p) e) Să se găsească o matrice $D\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $D\neq O_2$, astfel încât $A\cdot D=D\cdot A=O_2$.

(2p) f) Să se arate că, dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $A\cdot X=X\cdot A=O_2$, atunci $(A+X)^n=A^n+X^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}$ și șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$, $b_n=a_n+\frac{1}{2n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se calculeze $\int f(x)dx$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

(4p) c) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

(4p) d) Să se arate că $\frac{1}{(k+1)^3}<\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2(k+1)^2}$, $\forall k>0$.

(2p) e) Să se arate că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

(2p) f) Să se arate că $1\leqslant a_n<1{,}22$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 11

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte submulţimi cu 2 elemente are o mulţime cu 5 elemente?

(3p) **2.** În câte moduri se pot permuta cele 4 litere a, b, c, d astfel încât literele a şi b să fie mereu alăturate? (De exemplu c, b, a, d şi c, a, b, d sunt corecte).

(3p) **3.** Câte rădăcini raţionale are polinomul X^3+X^2+X+1?

(3p) **4.** Care este suma rădăcinilor polinomului X^3+X^2+X+1?

(3p) **5.** Care este produsul rădăcinilor polinomului X^3+X^2+X+1?

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Câte puncte de extrem local are funcţia f?

(3p) **9.** Cât este $\int\limits_{-1}^{1} xf(x)\,dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\dfrac{5\pi}{3}$?

(4p) **12.** Care dintre numerele următoare $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ sau $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ este mai mare?

(4p) **13.** Care este conjugatul numărului complex $z = 1 + i$?

(4p) **14.** Un triunghi ABC are laturile $AB = 4$, $BC = 5$ şi $AC = 6$. Cât este aria triunghiului ABC?

(2p) **15.** Care este lungimea segmentului AB, dacă $A(1, 2, 3)$ şi $B(3, 2, 1)$?

(2p) **16.** Care este suma numerelor $1 + i$ şi $2 - 3i$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (30p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ și matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se verifice că $O_2 \in G$ și $I_2 \in G$.

(4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

(4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A+B \in G$.

(4p) d) Să se arate că dacă $X \in G$, atunci $\det(X) \neq 2$.

(2p) e) Să se găsească două matrice $P, Q \in G$, $P, Q \neq O_2$ astfel încât $PQ = O_2$.

(2p) f) Să se găsească o matrice $M \in G$, cu proprietatea $\det(M) = 2004$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

(2p) d) Să se determine asimptota la graficul funcției f către $-\infty$.

(4p) e) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 12

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Cât este C_{10}^2?

(3p) **2.** Câte elemente inversabile față de înmulțire are inelul $\mathbb{Z}_6$?

(3p) **3.** Câte soluții are ecuația $\hat{x}^2 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_8$?

(3p) **4.** Cât este suma $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$, să fie număr par?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^4}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **9.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcției f?

(3p) **10.** Cât este $\int_0^1 f'(x)dx$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care dintre numerele următoare este mai mare: sin2 sau sin3?

(4p) **12.** Care este aria unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungime b și c?

(4p) **13.** Cât este $\left(\cos\dfrac{\pi}{2005} + i\sin\dfrac{\pi}{2005}\right)^{2005}$?

(4p) **14.** Dacă $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, câte elemente are $U_4 \cup U_6$?

(2p) **15.** Care este ecuația cercului cu centrul în $O(0, 0)$ și de rază 1?

(2p) **16.** Care este cosinusul unghiului făcut de dreptele $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ și $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră mulțimile $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, $B = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + ... + a_0, a_4, a_3, ..., a_0 \in \mathbb{R}, a_4 \neq 0\}$, $C = \{u \circ v \mid u, v \in A\}$, unde „$\circ$" reprezintă operația de compunere a funcțiilor.

(4p) a) Să se arate că dacă $u, v \in A$, atunci $u \circ v \in B$.

(4p) b) Să se verifice că dacă $f \in A$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, atunci

$$f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(4p) c) Să se găsească o funcție $g \in B$ cu proprietatea $g(1 - x) = g(1 + x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) d) Să se arate că funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^4 + x + 1$ are proprietatea că $\forall a \in \mathbb{R}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $h(a - x) \neq h(a + x)$.

(2p) e) Utilizând relația de la punctul b), să se arate că dacă $w \in C$, atunci există $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $w(c - x) = w(c + x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) f) Să se arate că mulțimea $B - C$ este nevidă.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se verifice identitatea $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4, \forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se verifice că $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Să se arate că $(x - 1)F(x) = x^5 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) d) Să se arate că $F(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) e) Să se arate că funcția F este convexă pe $\mathbb{R}$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + ... + f(n)}{F(n)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 13

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

Polinomul $f = X^2 + X + 1$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(3p) **1.** Care este restul împărţirii polinomului $X^3 - 1$ la polinomul f?

(3p) **2.** Cât este modul rădăcinii x_1?

(3p) **3.** Cât este x_1^3?

(3p) **4.** Cât este S_3?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca S_n să fie egal cu 2 când $n \in \{1, 2, ..., 5\}$?

Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcţia f?

(3p) **10.** Care este aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = 0$ şi $x = 1$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungime b şi c?

(4p) **12.** Să se treacă în produs suma sin1 + sin3.

(4p) **13.** Care este forma algebrică a numărului $\dfrac{1+i}{2-3i}$?

(4p) **14.** Care este aria totală a unei piramide patrulatere regulate cu latura 1 şi înălţimea 1?

(2p) **15.** Care este distanţa dintre punctele $A(1, 0, 0)$ şi $B(0, 1, 0)$?

(2p) **16.** Care este distanţa de la punctul $M(1, 1, 1)$ la planul $x + y + z = 1$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră polinomul $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ având forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$.

(4p) a) Să se calculeze $f(0)$.

(4p) b) Să se determine a_{10} și a_9.

(4p) c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f.

(4p) d) Să se arate că polinomul f are toți coeficienții numere reale.

(2p) e) Să se arate că, dacă $z \in \mathbb{Z}$ este o rădăcină a lui f, atunci $|z+i| = |z-i|$.

(2p) f) Să se arate că polinomul f are numai rădăcini reale.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^{2004} - 2004x - 1$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

(4p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(4p) d) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) f) Să se arate că $(x + 1)^{2005} \geq 2005 \cdot 1002x^2 + 2005x + 1$, $\forall x \geq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 14

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

Polinomul $f = X^2 - X + 1$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(3p) **1.** Care este restul împărţirii polinomului $X^3 + 1$ la polinomul f?

(3p) **2.** Cât este modulul rădăcinii x_1?

(3p) **3.** Cât este x_1^3?

(3p) **4.** Cât este S_3?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca S_n să fie egal cu -2 când $n \in \{1, 2, ..., 5\}$?

Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcţia f?

(3p) **10.** Care este aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = 0$ şi $x = 1$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este distanţa de la punctul $A(2, 3)$ la dreapta $d: x + 2y + 3 = 0$ în sistemul cartezian xOy?

(4p) **12.** Cât este $\sin\dfrac{13\pi}{6}$?

(4p) **13.** Câte soluţii reale are ecuaţia $x^{2004} = 1$?

(4p) **14.** Găsiţi un număr complex care înmulţit cu $1 + 2i$ să dea un număr cu partea reală 0.

(2p) **15.** Care este aria triunghiului ABC, dacă $AB = 2$, $AC = 3$ şi $\sin(\hat{A}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

(2p) **16.** Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(1, 2)$ şi $B(2, 1)$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

(4p) a) Să se verifice că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

(4p) b) Să se verifice identitatea $X^2-5I_2=(X-\sqrt{5}I_2)(X+\sqrt{5}I_2)$, $\forall X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(4p) c) Să se arate că, dacă polinomul $f\in \mathbb{Q}[X]$, $f=X^2-(a+d)X+ad-bc$ are o rădăcină egală cu $\sqrt{5}$, atunci $a+d=0$ și $ad-bc=-5$.

(4p) d) Să se găsească o matrice $B\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, cu proprietatea $B^2=5I_2$.

(2p) e) Să se arate că $\det(XY)=\det(X)\cdot\det(Y)$, $\forall X, Y\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(2p) f) Să se arate că, dacă $\det(X^2-5I_2)=0$, unde $X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, atunci $X^2=5I_2$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=f(-x)$, $\forall x\in\mathbb{Q}$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{Q}$.

(4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(4p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}$.

(2p) f) Să se rezolve în mulțimea $(0, \infty)$ ecuația $f(x)+f(x^{27})=f(x^5)+f(x^{1986})$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 15

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte soluţii are ecuaţia $\hat{x}^2 = \hat{x}$ în inelul $\mathbf{Z}_6$?

(3p) **2.** Câte elemente inversabile faţă de înmulţire are inelul $\mathbf{Z}_6$?

(3p) **3.** Cât este C_9^2?

(3p) **4.** Care este suma elementelor inelului $\mathbf{Z}_6$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element al mulţimi $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ să se dividă cu 3?

Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 5x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^5}$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcţia f?

(3p) **10.** Cât este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este modulul numărului complex $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

(4p) **12.** Care este lungimea înălţimii care cade pe ipotenuză într-un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime b şi c?

(4p) **13.** Să se treacă în produs suma cos1 + cos3.

(4p) **14.** Care este aria totală a unui tetraedru regulat de latură a?

(2p) **15.** Care este conjugatul numărului $-1 + i$?

(2p) **16.** Cât este $\left|\dfrac{3+5i}{3-5i}\right|$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (2 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze AB și BA.

(4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) c) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_3$.

(4p) d) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se determine inversa sa.

(2p) e) Să se calculeze determinantul matricei $X = A + A^2 + ... + A^{2004}$.

(2p) f) Să se arate că $(AB)^n \neq I_3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 4)^{2004} - x^{2004}$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se verifice că $f(-2 - x) + f(-2 + x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(3p) d) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

(3p) e) Să se calculeze $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

(3p) f) Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 16

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.*

(3p) **1.** Câte submulţimi are o mulţime cu 4 elemente?

(3p) **2.** Câte soluţii are ecuaţia $\hat{2}x = \hat{4}$ în inelul $\mathbf{Z}_6$?

(3p) **3.** Care este probabilitatea ca, alegând un element din inelul $\mathbf{Z}_4$, acesta să fie inversabil faţă de înmulţire?

(3p) **4.** Câte elemente inversabile faţă de înmulţire sunt într-un corp cu 5 elemente?

(3p) **5.** Care este valoarea sumei $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10}$?

Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **9.** Care este numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f?

(3p) **10.** Care este numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este formula ariei unui triunghi numai în funcţie de laturi?

(4p) **12.** Cât este $\sin(180° + 2°) + \sin 2°$?

(4p) **13.** Câte elemente din mulţimea $\{\cos 0°, \cos 1°, \ldots, \cos 179°, \cos 180°\}$ sunt strict pozitive?

(4p) **14.** Care este volumul unei piramide patrulatere regulate cu latura 1 şi înălţimea 1?

(2p) **15.** Care este modulul sumei $1 + i + i^2 + \ldots + i^{2005}$?

(2p) **16.** Cât este $\left(\cos\dfrac{\pi}{2004} + i\sin\dfrac{\pi}{2004}\right)^{2004}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete.*

Subiectul III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid XA=AX\}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) b) Să se calculeze matricea A^2.

(4p) c) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

(4p) d) Să se arate că, dacă $U, V\in C(A)$, atunci $U\cdot V\in C(A)$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $X\in C(A)$, atunci există $a, b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$.

(2p) f) Să se arate că, dacă $Y\in C(A)$ și $Y^{2004}=O_2$, atunci $Y=O_2$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\arcsin(\sin x)$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x+2\pi)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(4p) c) Să se arate că $2-\frac{\pi}{2}\leqslant f(x)\leqslant 2+\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) d) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(2p) e) Să se verifice că $F(x)=2x+\frac{x^2}{2}$, $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvările testelor

Matematică-informatică
Varianta 1

Subiectul I.

1. Efectuând calculele obținem câtul $X^4 - X^3 + 2X - 2$.

2. Restul este 3.

3. $f = cg + r$, deci $f(y_1) = r(y_1) = 3$ și $f(y_2) = 3$. Deci $f(y_1) + f(y_2) = 6$.

4. $g(x_1) + \ldots + g(x_6) = (x_1^2 + \ldots + x_6^2) + (x_1 + \ldots + x_6) + 6$. Dar $x_1 + \ldots + x_6 = 0$, iar $x_1^2 + \ldots + x_6^2 = (x_1 + \ldots + x_6)^2 - 2(x_1x_2 + \ldots + x_5x_6) = 0$. Deci $g(x_1) + \ldots + g(x_6) = 6$.

5. $(X^3 - 1) \cdot f = X^9 - 1$. Deci rădăcinile polinomului f sunt incluse în cele ale polinomului $h = X^9 - 1$. Acesta are o rădăcină reală ($x = 1$) și 8 rădăcini nereale. Cum $f(1) = 3$, deducem că polinomul f nu are nici o rădăcină reală.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(x + \operatorname{arctg} x) = \infty$.

7. $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$.

9. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1$, vom calcula $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$. Rezultă că $y = x + \dfrac{\pi}{2}$ este asimptota oblică la graficul funcției f către ∞.

10. $\int_0^1 (x + \operatorname{arctg} x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \dfrac{1}{2} + x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{2 + \pi - \ln 4}{4}$.

Subiectul II.

11. O infinitate.

12. -1.

13. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.

14. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. $x + y + z = 0$.

16. 0.

Subiectul III.

a) Pentru $\hat{x} = \hat{1}$, $\hat{y} = \hat{0}$ avem $I_2 \in G$, iar pentru $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$ avem $O_2 \in G$.

b) Se vede uşor că, dacă $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$, atunci $\hat{x}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}$. Dacă $\hat{y}^2 = \hat{0}$ rezultă $\hat{x}^2 = \hat{0}$, adică $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$. Dacă $\hat{y}^2 = \hat{1}$, rezultă $\hat{x}^2 = \hat{2}$, fals, iar dacă $\hat{y}^2 = \hat{4}$, rezultă $\hat{x}^2 = \hat{3}$, fals.

c) Dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \hat{c} & \hat{d} \\ \hat{2}\hat{d} & \hat{c} \end{pmatrix}$, atunci $A+B = \begin{pmatrix} \hat{a}+\hat{c} & \hat{b}+\hat{d} \\ \hat{2}(\hat{b}+\hat{d}) & \hat{a}+\hat{c} \end{pmatrix}$, deci

$A + B \in G$, iar $AB = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d} & \hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c} \\ \hat{2}(\hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}) & \hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d} \end{pmatrix}$ de unde rezultă că şi $AB \in G$.

d) Cum $\hat{x}$ şi $\hat{y}$ pot lua câte 5 valori, rezultă că mulţimea G are 25 de elemente.

e) Dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \in G$, atunci $\det A = \hat{x}^2 - 2\hat{y}^2$ şi cum $A \neq O_2$, rezultă $\det(A) \neq \hat{0}$. Considerăm $\hat{z} \in \mathbf{Z}_5$ inversul elementului $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2$. Atunci matricea $B = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{z} & -\hat{y}\hat{z} \\ -\hat{2}\hat{y}\hat{z} & \hat{x}\hat{z} \end{pmatrix} \in G$ şi $AB = I_2$, deoarece $\hat{z}(\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2) = \hat{1}$.

f) De exemplu, $(G, +, \cdot)$ este un corp cu 25 de elemente.

Subiectul IV.

a) Avem $f(1) = 2003$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) Avem $f(x) = \dfrac{x^{2003} - 1}{x - 1}$, pentru $x \neq 1$.

Cum $f(1) > 0$, vom avea $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		∞
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^{2003}-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	2003	$+$	

d) Avem $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, deci $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Cum $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este strict crescătoare, deci injectivă. Din $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$, rezultă că F este surjectivă. Deci F este bijectivă.

f) Fie $I = \int_0^a g(x)dx$. Schimbăm variabila: $g(x) = t \Rightarrow x = F(t)$. Pentru $x = 0$ avem $F(t) = 0$, deci $t = 0$ iar pentru $x = a$, avem $F(t) = a = F(1)$, adică $t = 1$. Deci

$$I = \int_0^1 tF'(t)\,dt = \int_0^1 tf(t)\,dt = \int_0^1 (t + t^2 + .. + t^{2003})\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2004} = a - 1 + \frac{1}{2004} = a - \frac{2003}{2004}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 2

Subiectul I.

1. Elementele inversabile din inelul $\mathbf{Z}_{24}$ sunt $\{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{17}, \hat{19}, \hat{23}\}$, deci sunt 8 elemente.

2. Ecuația $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$ are soluțiile $\hat{x} = \hat{2}$ și $\hat{x} = \hat{14}$, deci două soluții. Produsul lor este $\hat{4}$.

3. Soluțiile ecuației $\hat{x}^2 = \hat{x}$ sunt $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{9}, \hat{16}\}$, deci suma lor este $\hat{2}$.

4. Soluțiile ecuației $\hat{x}^3 = \hat{0}$ sunt $\{\hat{0}, \hat{6}, \hat{12}, \hat{18}\}$, deci numărul lor este 4.

5. Probabilitatea este $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

6. $f'(x) = 2004x^{2003} + 1$.

7. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2005$.

8. $f''(x) = 2004 \cdot 2003 \cdot x^{2002}$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = 0$, însă derivata a doua nu își schimbă semnul. Deci f este convexă pe $\mathbb{R}$ și nu are puncte de inflexiune.

9. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2005}$.

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2005}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x^{2005}}{2005} + \frac{x^2}{2} + x}{x^{2005}} = \frac{1}{2005}$.

Subiectul II.

11. 1.

12. $2 + \sqrt{2}$.

13. $\frac{1}{2}$.

14. $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

15. 1.

16. $\frac{12}{13}$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) $\det(V) = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \neq 0$, deoarece polinomul g are rădăcini distincte.

Scanned with OKEN Scanner

c) Se verifică prin calcul direct. De exemplu, elementul de pe linia 1 coloana 3 a produsului este $c+dx_1+ax_1^2+bx_1^3=x_1^2(a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3)=x_1^2f(x_1)$, deoarece $x_1^4=1$. Se verifică analog pentru toate celelalte.

d) Avem $\det(AV)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\det(V)$. Cum $\det(AV)=\det(A)\det(V)$ și $\det(V)\neq 0$, rezultă că $\det(A)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.

e) Avem $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ și atunci $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ iar $A^4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

f) Cum $A^4=I_4$, rezultă că A este inversabilă și $A^{-1}=A^3$.

Subiectul IV

a) $g(0)=0$ și $h(0)=0$.

b) $g'(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, deci

$g'(x)=e^{-x}\frac{x^n}{n!}\cdot h'(x)=\frac{1}{n!}f(x)=\frac{1}{n!}e^{-x}x^n$, deci $g'(x)=h'(x)$.

c) Considerăm funcția $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $u(x)=g(x)-h(x)$. Cum $u(0)=0$ și $u'(x)=g'(x)-h'(x)=0$, $\forall x\geqslant 0$, rezultă că u este constantă și deci $u(x)=0$, $\forall x\geqslant 0$. Atunci $g(x)=h(x)$, $\forall x\geqslant 0$.

d) Cum $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\geqslant 0$, rezultă că $h(x)\geqslant 0$, $\forall x\geqslant 0$, deci $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\geqslant 0$. Avem $f'(x)=-e^{-x}x^n+nx^{n-1}e^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$. De aici rezultă că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, n]$.

Deci $g(x)=h(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f(t)dt\leqslant\frac{1}{n!}\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{n!}xf(x)=\frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!}$, $\forall x\in[0,n]$.

e) Fie $a_n=\frac{x^{n+1}}{n!}$, cu $x>0$. Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}<1$, $\forall n>x$, deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător și cum $a_n>0$, este și mărginit, deci convergent. Fie $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$. Atunci, trecând la limită relația $a_{n+1}=a_n\frac{x}{n+1}$, rezultă $L=L\cdot 0$, adică $L=0$, deci $a_n\to 0$. Pentru $x=0$, este evident că $a_n\to 0$.

f) Din inegalitățile de la d) avem $0\leqslant 1-e^x\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\leqslant\frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!}$, de unde rezultă $0\leqslant e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!}$, $\forall x\in[0,n]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Fie $x\geqslant 0$ fixat și considerăm $n\geqslant x$ variabil. Trecem la limită după n relațiile și obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\right)=0$ sau că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

Cum aceasta este adevărată $\forall x\geqslant 0$, problema este rezolvată.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 3

Subiectul I.

1. Expresia este 0.

2. Polinomul f nu are rădăcini reale.

3. Suma $x_1 + ... + x_4$ este 0.

4. Produsul $x_1 \cdot ... \cdot x_4$ este 1.

5. Cum $X^6 - 1$ se divide cu f, rezultă că $x_1^6 = ... = x_4^6 = 1$. Deci suma $x_1^6 + ... + x_4^6 = 4$.

6. Asimptota este $y = 0$.

7. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

9. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^2+1} = 2\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{2}$.

10. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$.

Subiectul II.

11. 0.

12. 1.

13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

14. $x = 4$.

15. 2.

16. $4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$.

Subiectul III.

a) $\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Cum $\det(A) \neq 0$, rezultă $\operatorname{rang}(A) = 3$.

b) Deoarece $\det(A) \neq 0$, rezultă A este matrice inversabilă. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Luăm $Y=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Din $AY = YA$, rezultă $x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = y_3 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$. Notând $x_1 = a$, $y_2 = b$, $z_3 = c$, obţinem $Y=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{C}$.

d) Avem de arătat $P(n)$: $Z^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

$P(1)$: $Z=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ este evident. Vom arăta: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, unde

$P(n+1)$: $Z^{n+1}=\begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$.

$Z^{n+1} = Z^n \cdot Z$ şi din $P(n)$ rezultă $Z^{n+1}=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$.

e) Dacă $a \in \mathbb{C}^*$ este soluţie multiplă, atunci $f=(X-a)(X^{n-1}+\ldots+a^{n-1})=(X-a)g$ şi rezultă că a este soluţie pentru g, adică $a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}=0 \Rightarrow a=0$, fals.

f) Fie $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ o soluţie a ecuaţiei $X^{2002}=A$. Rezultă $X\cdot A=X\cdot X^{2002}=X^{2002}\cdot X=A\cdot X$ şi din punctul c) rezultă $X=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Din punctul d) rezultă $X^{2002}=\begin{pmatrix} x^{2002} & 0 & 0 \\ 0 & y^{2002} & 0 \\ 0 & 0 & z^{2002} \end{pmatrix}$, de unde ecuaţiile $x^{2002}=1$, $y^{2002}=2$, $z^{2002}=3$. Din punctul e) rezultă că ecuaţia $x^n=a$, $a\neq 0$ are n soluţii în $\mathbb{C}$. Deci ecuaţia $X^{2002}=A$ va avea 2002^3 soluţii în $\mathbb{C}$.

Subiectul IV.

a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)!}>0\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}-\frac{1}{n!n}=\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}<0\Rightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător.

c) Din $(a_n)_{n\geq 1}$ strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e$ rezultă $a_n<e, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Din $(b_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=e$ rezultă $e<b_n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Din cele două relaţii obţinem $a_{n+1}<e<b_n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Din punctul c) rezultă $a_n+\frac{1}{(n+1)!}<e<a_n+\frac{1}{n!n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, de unde $\frac{1}{(n+1)!}<e-a_n<\frac{1}{n!n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

e) Presupunem prin reducere la absurd că $e\in\mathbb{Q}\Rightarrow e=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}^*$. Aplicăm relația de la punctul d) pentru $n=q$ și obținem $\frac{1}{(q+1)!}<\frac{p}{q}-a_q<\frac{1}{q!q}$. Înmulțind inegalitățile cu $q!$ vom avea $0<\frac{1}{q+1}<p(q-1)!-a_q\cdot q!<\frac{1}{q}\leqslant 1$, de unde $0<p(q-1)!-a_q\cdot q!<1$. Dar $p(q-1)!-a_q\cdot q!\in\mathbb{Z}$, fals. Deci $e\notin\mathbb{Q}$.

f) Presupunem că există $f, g\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât $a_n=\frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\frac{1}{(n+1)!}=a_{n+1}-a_n=\frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{u(n)}{v(n)}$ sau $u(n)=\frac{v(n)}{(n+1)!}$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v(n)}{(n+1)!}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0\Rightarrow$ u polinom nul, fals (deoarece am avea $\frac{1}{(n+1)!}=0$).

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 4

Subiectul I.

1. Cum $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, rezultă că suma elementelor sale este 8.

2. $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + A(a + b + 2ab) = X(a + b + 2ab)$.

3. Se verifică prin calcul direct că $\det(X(a)) = 2a + 1$.

4. Din $\det(X(a)) = 0$, rezultă $a = -\frac{1}{2}$. Deci singura matrice neinversabilă este $X\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab)$, deci $a + b + 2ab = 0$ conduce la $b = \frac{-a}{1+2a}$. Atunci $(X(a))^{-1} = X\left(\frac{-a}{1+2a}\right)$.

6. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

8. Cum $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este constantă, iar din $f(0) = \frac{\pi}{2}$, deducem $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $\int_{10}^{20} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot 10 = 5\pi$.

9. Cum f este constantă, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.

Subiectul II.

11. $2y = x + 2$.

12. $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1 + i$.

13. $x - 2y + z = 0$.

14. 0.

15. $\frac{3}{2}$.

16. 2000

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III.

a) $x, y \in H_n \Rightarrow x = \frac{k}{n!}$, $y = \frac{p}{n!} \Rightarrow x + y = \frac{k+p}{n!} = \frac{r}{n!} \in H_n$.

b) $x \in H_n \Rightarrow x = \frac{k}{n!} \Rightarrow -x = -\frac{k}{n!} \in H_n$.

c) Fie $n < p \in \mathbb{N}^*$ şi fie $x \in H_n$. Vom arăta că $x \in H_p$. Din $x \in H_n$ rezultă $x = \frac{k}{n!}$. Amplificăm pentru a putea obţine numitorul $p!$ şi obţinem $x = \frac{k(n+1)...p}{p!} = \frac{u}{p!} \in H_p$. Cum x a fost ales arbitrar, rezultă $H_n \subset H_p$.

d) Fie $r = \frac{p}{n}$. Amplificăm fracţia cu $1 \cdot 2 \cdot ... (n-1)$ şi obţinem

$r = \frac{p \cdot 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)}{n!} = \frac{u}{n!} \in H_n$.

e) Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ avem $\frac{k}{n!} = \pm \left(\underbrace{\frac{1}{n!} + ... + \frac{1}{n!}}_{\text{de } |k| \text{ ori}} \right) \in G$, deci $H_n \subset G$.

f) $\mathbb{Q} = G_1 \cup ... \cup G_{2002} \Rightarrow G_i \subset \mathbb{Q}$, $\forall i \in \{1, ..., 2002\}$. Vom arăta că există $i \in \{1, ..., 2002\}$ astfel încât $\mathbb{Q} \subset G_i$.

Fie $A = \left\{ \frac{1}{n!} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{Q}$. Există $i \in \{1, ..., 2002\}$ astfel încât $A \cap G_i$ este infinită.

Fie $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $n \geq q$ astfel încât $\frac{1}{n!} \in G_i \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p \cdot \frac{n!}{q}}{n!} \in H_n$ şi cum $\frac{1}{n!} \in G_i \Rightarrow H_n \subset G_i$, deci $r \in G_i \Rightarrow \mathbb{Q} = G_i$.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = -2002x^{2001}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f''(x) = -2002 \cdot 2001 x^{2000} < 0, \forall x \in [0, \infty)$ rezultă că f' este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(f'\left(\frac{1}{n}\right) + f'\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f'\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 0 - 1 = -1$.

d) Pentru $x = \frac{k}{n}$ inegalităţile sunt evidente. Fie $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$. Din teorema lui Lagrange, există $c \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$ astfel încât $\frac{f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{x - \frac{k}{n}} = f'(c)$. Cum $\frac{k-1}{n} < c < \frac{k}{n}$ şi f' este strict descrescătoare, rezultă $f'\left(\frac{k-1}{n}\right) > f'(c) > f'\left(\frac{k}{n}\right)$, adică

Scanned with OKEN Scanner

$f'\left(\frac{k-1}{n}\right)>\frac{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{x-\frac{k}{n}}>f'\left(\frac{k}{n}\right)$ și înmulțind cu $x-\frac{k}{n}<0$ rezultă concluzia.

e) Integrăm inegalitățile de la punctul d), de la $\frac{k-1}{n}$ la $\frac{k}{n}$. Rezultă:

$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\cdot f'\left(\frac{k-1}{n}\right)dx\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\cdot f'\left(\frac{k}{n}\right)dx$. Calculând integralele, obținem $-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)$, $\forall\, n\geqslant 2$ și $k\in\{1, 2,..., n\}$.

f) Adunăm inegalitățile de la punctul e) de la $k=1$ la $k=n$ și obținem:

$$-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\left[f'(0)+f'\left(\frac{1}{n}\right)+...+f'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\leqslant\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\left[f'\left(\frac{1}{n}\right)+f'\left(\frac{2}{n}\right)+...+f'\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$

Înmulțind inegalitățile anterioare cu n și ținând seama de limita de la punctul c) rezultă că $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 5

Subiectul I.

1. Pentru simplitate, vom afla rădăcinile polinomului f. Notăm $x^2 = t$ și rezolvăm în $\mathbb{C}$ ecuația $t^2 - 14t + 9 = 0$; avem

$t_1 = 7 - 2\sqrt{10}$ și $t_2 = 7 + 2\sqrt{10}$, $t_1, t_2 > 0$.

Din $x^2 = 7 - 2\sqrt{10}$ rezultă $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ și $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Din $x^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ rezultă $x_3 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ și $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Deci $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nu este rădăcină a lui f.

2. Conform relațiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = 0$.

3. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 9$, folosind de asemenea relațiile lui Viète.

4. Din $p\sqrt{2} + q\sqrt{5} + r\sqrt{10} + s = 0$ rezultă $p\sqrt{2} + q\sqrt{5} = -s - r\sqrt{10}$ care prin ridicare la pătrat ne conduce la $2p^2 + 5q^2 + 2\sqrt{10}pq = s^2 + 10r^2 + 2sr\sqrt{10}$. De aici obținem relațiile $2p^2 + 5q^2 = s^2 + 10r^2$ și $pq = rs$ (1). Apoi din $p\sqrt{2} + r\sqrt{10} = -s - q\sqrt{5}$, procedând analog obținem $2p^2 + 10r^2 = s^2 + 5q^2$ și $2pr = sq$ (2). Din $p\sqrt{2} + s = -q\sqrt{5} - r\sqrt{10}$, rezultă $2p^2 + s^2 = 5q^2 + 10r^2$ și $ps = 5qs$ (3). Din (1) și (3), rezultă $4p^2 + 5q^2 + s^2 = s^2 + 20r^2 + 5q^2$, adică $p^2 = 5r^2$. Dacă $r \neq 0$, atunci $\left(\frac{p}{r}\right)^2 = 5$ sau $\frac{p}{r} \in \{\pm\sqrt{5}\}$, fals. Deci $r = 0$ și atunci $p = 0$. Înlocuind în (1), obținem $s^2 = 5q^2$, care ne conduce la $q = s = 0$. Deci $2p + 5q + 10r + s = 0$.

5. Se observă că $B \subset A$. Vom arăta că $A \subset B$. Fie $\alpha \in A$; atunci $\exists g \in \mathbb{Z}[X]$ a.î. $g(a) = \alpha$. Cum $g \cdot f = c$ rest r, cu grad $r \leqslant 3$, obținem $g(a) = f(a) \cdot c(a) + r(a) = r(a) \in B$, deci $A \subset B$. Din $A \subset B$ și $B \subset A$ rezultă $A = B$.

6. Se știe că 2π este perioada principală a funcției sin.

7. Pentru simplitate vom folosi următorul tabel:

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		$5\pi/2$	...	$21\pi/2$		11π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	...	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	−1	↗	1	...		↘	

Deci, punctele de maxim local pentru f sunt: $\pi/2$, $5\pi/2$, $9\pi/2$, $13\pi/2$; $17\pi/2$ și $21\pi/2$. În concluzie, f are șase puncte de maxim local în intervalul $[0, 11\pi]$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Aria suprafeței respective este

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4.$$

9. Vom demonstra și aplica următorul rezultat:

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție periodică cu $T>0$ perioadă principală, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\dfrac{\int_0^T f(x)dx}{T}$. Se știe că $\int_a^T f(x)dx=\int_a^{a+T}f(x)dx$, $\forall\, a\in\mathbb{R}$.

Fie $n_x=\left[\dfrac{x}{T}\right]$. Cum $x\to\infty$ rezultă că $n_x\to\infty$.

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^T f(t)dt+\ldots+\int_{(n_x-1)T}^{n_xT}f(t)dt+\int_{n_xT}^x f(t)dt=n_x\int_0^T f(x)dx+\underbrace{\int_{n_xT}^x f(t)dt}_{R}.$$

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\frac{n_x\cdot\int_0^T f(x)dx+R}{n_xT+r}=\frac{\int_0^T f+\frac{R}{n_x}}{T+\frac{r}{n_x}}\to\frac{\int_0^T f(x)dx}{T}$$ deoarece R este mărginită,

$r\in[0,\,T]$. În cazul nostru limita va fi $\dfrac{2}{\pi}$.

10. $f''(x)=-\sin x$. Pentru ca f să fie convexă, trebuie ca $f''(x)\geqslant 0$, de unde $-\sin x\geqslant 0\Leftrightarrow\sin x\leqslant 0\Leftrightarrow x\in[\pi;\,2\pi]$; rezultă că lungimea maximă a unui interval inclus în $[0;\,2\pi]$ pe care funcția f este convexă este π.

Subiectul II.

11. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

12. 2.

13. 12.

14. $\dfrac{34}{\sqrt{29\cdot 50}}$.

15. $z_1=-1-i;\ z_2=-1+i$.

16. $x+y+z=6$.

Subiectul III.

a) Matricea sistemului este A.

b) $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow \operatorname{rang}A=3$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Din primele două ecuații ale sistemului rezultă $x = 1$ iar din ultimele două rezultă $y = 0$. Notând $z = \lambda$, avem $t = -\lambda$, deci soluția sistemului este de forma $(1, 0, \lambda, -\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

d) $I_3 A = A$, deci suma elementelor matricei $I_3 A$ este 9.

e) Fie $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$; atunci $AX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} a_i & \sum_{i=1}^{4} b_i & \sum_{i=1}^{4} c_i \\ \sum_{i=2}^{4} a_i & \sum_{i=2}^{4} b_i & \sum_{i=2}^{4} c_i \\ \sum_{i=3}^{4} a_i & \sum_{i=3}^{4} b_i & \sum_{i=3}^{4} c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

și avem de rezolvat sistemele: $(1): \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$ $(2): \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \\ b_2 + b_3 + b_4 = 1 \\ b_3 + b_4 = 0 \end{cases}$

și $(3): \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_3 + c_4 = 1 \end{cases}$. Soluțiile sunt de tipul $(1, 0, \lambda, -\lambda)$, $(-1, 1, \alpha, -\alpha)$ și $(0, 1, \beta, 1 - \beta)$ cu $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$, deci $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \lambda & \alpha & \beta \\ -\lambda & -\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$ cu $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Rezultă că ecuația are o infinitate de soluții.

f) Fie $Y \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$, $Y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$. Atunci

$YA = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 & a_1 + b_1 + c_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + b_2 + c_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & a_3 + b_3 & a_3 + b_3 + c_3 & a_3 + b_3 + c_3 \\ a_4 & a_4 + b_4 & a_4 + b_4 + c_4 & a_4 + b_4 + c_4 \end{pmatrix}$ și $\det(YA) = 0$ deoarece YA are două coloane egale. Rezultă că ecuația $YA = I_3$ nu are soluție.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV.

a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{(n+1)^2}}>0\Rightarrow a_n<a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\{n\in\mathbb{N}^*\,|\,a_n<a_{n+1}\}=\mathbb{N}^*$.

b) $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2^{(n+1)^2}}+\frac{1}{2(n+1)\cdot 2^{(n+1)^2}}-\frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}=\frac{2n^2+3n-(n+1)\cdot 2^{2n+1}}{2n(n+1)\cdot 2^{(n+1)^2}}<0\Rightarrow$

$\Rightarrow\{n\in\mathbb{N}^*\,|\,b_n>b_{n+1}\}=\mathbb{N}^*$. Vom arăta că $b_{n+1}-b_n<0$. Într-adevăr $2n(n+1)+n-(n+1)2^{2n+1}<(n+1)(2n+1-2^{2n+1})<0\Leftrightarrow 2n+1<2^{2n+1}$, care se demonstrează foarte uşor prin inducţie.

c) Din a) şi b) rezultă $a_1\leqslant a_n<b_n\leqslant b_1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, adică $\frac{1}{2}\leqslant a_n<b_n\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) Din a), b) şi c) rezultă că $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt convergente. Dacă $a_n\to a$ şi $b_n\to b$, atunci, din $b_n=a_n+\frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}$ rezultă $a=b$.

e) Este clar că $a_n<a<b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Să presupunem că $a\in\mathbb{Q}$; din $a=\frac{p}{q}$ cu $(p,q)=1,\ p,q\in\mathbb{N}^*$ rezultă $a_q<\frac{p}{q}<a_q+\frac{1}{2q\cdot 2^{q^2}}$.

Înmulţim inegalităţile cu $q\cdot 2^{q^2}\in\mathbb{Z}$ şi rezultă $q\cdot 2^{q^2}\cdot a_q<p\cdot 2^{q^2}<q\cdot 2^{q^2}a_q+\frac{1}{2}$.

Notăm $q\cdot 2^{q^2}\cdot a_q=k\in\mathbb{Z}$ şi obţinem $k<p\cdot 2^{q^2}<k+\frac{1}{2}$, deci $p+2^{q^2}\notin\mathbb{Z}$, fals.

f) Presupunem că există polinoamele $f,\ g\in\mathbb{R}[X]$, nenule cu proprietatea $a_n=\frac{f(n)}{g(n)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Considerăm $\frac{f(x+1)}{g(x+1)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{v(x)}$, cu $u,\ v\in\mathbb{R}[X]$, prime între ele şi nenule. Atunci, din $a_{n+1}-a_n=\frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{u(n)}{v(n)}=\frac{1}{2^{(n+1)^2}}$, rezultă $u(n)=\frac{v(n)}{2^{(n+1)^2}},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v(n)}{2^{(n+1)^2}}=0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$, adică $u=0$, fals.

Deci nu există $f,\ g\in\mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $a_n=\frac{f(n)}{g(n)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 6

Subiectul I.

1. Se verifică prin calcul direct că $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{C}$.

2. Avem de rezolvat ecuația $(x^2-x+2)^3 = x^6-x^3+8$. Notăm $x^2 = a$, $-x = b$ și $2 = c$ și obținem $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$. Folosind exercițiul **1.** obținem $3(a+b)(b+c)(a+c) = 0$, de unde $a+b=0 \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$, sau $b+c=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2$, sau $a+c=0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

Deci ecuația are cinci soluții complexe.

3. Rezolvăm ecuația $(2^x-3^x+5^x)^3 = 8^x-27^x+125^x$. Notăm $2^x = a$, $-3^x = b$, $5^x = c$ de unde $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$ și obținem $3(a+b)(a+c)(b+c) = 0$. Atunci: $a+b=0 \Leftrightarrow 2^x = 3^x \Leftrightarrow x = 0$; $a+c=0 \Leftrightarrow 2^x = 5^x \Leftrightarrow x = 0$; $b+c=0 \Leftrightarrow 3^x = 5^x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare suma rădăcinilor reale ale ecuației este 0.

4. Conform relațiilor lui Viète, $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$.

5. $f(1)\cdot f(-1) = -1\cdot 5 = -5$.

6. Suma soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ este $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$, deoarece $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ și $x_4 = 4$.

7. $f'(x) = (x-2)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)(x-4)+$ $+(x-1)(x-2)(x-4) = 2(2x-5)(x^2-5x+5)$, deci $f'(x) = 0$ are trei soluții reale.

8. Pentru ușurință vom folosi tabelul alăturat. Deci f are trei puncte de extrem local.

x		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

9. Prin calcul direct se obține că expresia este egală cu 1.

10. Din 9., avem $f(x) = (x^2-5x+5)^2-1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deci $f(x) \geq -1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ și cum există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = -1$, rezultă că valoarea minimă este -1.

Subiectul II.

11. $8x+6y = 100$.

12. $\sqrt{3}$.

13. $\cos 89°$.

14. $3\vec{i}-2\vec{j}$.

15. 2004.

16. 2

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III.

a) Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2)$, $A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$ cu $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}\in\mathbf{Z}_2$. Cum $\mathbf{Z}_2$ are două elemente, rezultă că $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}$ pot lua fiecare câte două valori, deci se pot forma 16 elemente de tipul A. Rezultă că $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2)$ are 16 elemente.

b) Fie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2)$, $X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$. Atunci $X^2=\begin{pmatrix}\hat{a}^2+\widehat{bc} & \widehat{ab}+\widehat{bd}\\ \widehat{ac}+\widehat{cd} & \widehat{bc}+\hat{d}^2\end{pmatrix}$.

Pentru ca $X^2=O_2$ trebuie ca $\begin{cases}\hat{a}^2+\widehat{bc}=\hat{0}\\ \hat{b}\cdot(\widehat{a+d})=\hat{0}\\ \hat{c}(\widehat{a+d})=\hat{0}\\ \widehat{bc}+\hat{d}^2=\hat{0}\end{cases}$ de unde rezultă

$(\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d})\in\{(\hat{0},\hat{0},\hat{0},\hat{0});(\hat{0},\hat{1},\hat{0},\hat{0});(\hat{0},\hat{0},\hat{1},\hat{0});(\hat{0},\hat{1},\hat{1},\hat{0})\}$. Deci ecuația are patru soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2)$.

c) Elementele inversabile față de înmulțire ale lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2)$ sunt matricele cu determinantul nenul în $\mathbf{Z}_2$, adică cele de forma $\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$ cu $\widehat{ad}-\widehat{bc}=\hat{1}$. Deci posibilitățile sunt:

- $\hat{a}=\hat{d}=\hat{1}$, $\hat{b}=\hat{0}$ sau $\hat{a}=\hat{d}=\hat{1}$, $\hat{c}=\hat{0}$, deci 2 soluții
- $\hat{a}=0\Rightarrow\hat{d}\in\{\hat{0};\hat{1}\}\Rightarrow\hat{b}=\hat{c}=\hat{1}$, deci 2 soluții
- $\hat{a}=\hat{1}$ implică $\hat{d}=\hat{0}\Rightarrow\hat{b}=\hat{c}=\hat{1}$ sau $\hat{d}=\hat{1}\Rightarrow\begin{cases}\hat{b}=\hat{0}\Rightarrow\begin{cases}\hat{c}=\hat{0}\\ \hat{c}=\hat{1}\end{cases}\\ \hat{c}=\hat{0}\Rightarrow\begin{cases}\hat{b}=\hat{1}\\ \hat{b}=\hat{0}\end{cases}\end{cases}$, deci 2 soluții

În total sunt 6 soluții, adică 6 elemente inversabile în $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2)$.

d) Se verifică ușor că pentru $A=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}$ avem $AB\neq BA$.

e) Considerăm $C=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}$ și se observă că $C^3=I_2$, iar $C\neq I_2$.

f) Orice matrice pătratică de ordinul 2 verifică identitatea $A^2-\operatorname{tr}(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2$. Prin urmare, A trebuie să fie rădăcină pentru unul din polinoamele X^2; X^2+X; X^2+1; $(X+1)^2$; X^2+X+1.

Polinomul X^8-X^2 se divide cu fiecare din polinoamele de mai sus, deci orice matrice A verifică $A^8=A^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV.

a) $I_1(p)=\int_0^1(1-x^p)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1 x^p dx=1-\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{p}{p+1}$.

b) $I_n(p)=\int_0^1(1-x^p)^n dx=x(1-x^p)^n\Big|_0^1+pn\int_0^1(1-x^p)^{n-1}\cdot x^p dx=$

$=pn\cdot\int_0^1(1-x^p)^{n-1}\cdot(x^p-1+1)dx=-pn\cdot I_n+pn\cdot I_{n-1}$. Obţinem $(1+pn)\cdot I_n=pnI_{n-1}$, de unde $I_n(p)=\frac{pn}{1+pn}\cdot I_{n-1}(p)$, $\forall n\geq 2$, n, $p\in\mathbb{N}^*$ (s-a folosit metoda integrării prin părţi).

c) Folosind exerciţiul b) putem scrie: $I_n(n)=\frac{n^2}{n^2+1}\cdot I_{n-1}(n)$;

$I_{n-1}(n)=\frac{n(n-1)}{n(n-1)+1}\cdot I_{n-2}(n)$; ...; $I_2(n)=\frac{2n}{2n+1}\cdot I_1(n)$; $I_1(n)=\frac{n}{n+1}$.

Înmulţim membru cu membru cele n egalităţi şi obţinem

$$I_1(n)\cdot I_2(n)\cdot\ldots\cdot I_n(n)=\frac{n^2}{n^2+1}\cdot\frac{n(n-1)}{n(n-1)+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot I_{n-1}(n)\cdot I_{n-2}(n)\cdot\ldots\cdot I_1(n).$$

Simplificăm prin produsul $I_1(n)\cdot\ldots\cdot I_{n-1}(n)$ şi rezultă

$I_n(n)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) $f'(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x>0$.

e) Din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei f pe intervalul $[x, x+1]$ rezultă că $\exists\, c\in(x, x+1)$ a.î. $\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}=\frac{1}{c}$. Cum $c\in(x, x+1)$ avem $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ şi, folosind relaţia anterioară, obţinem $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, $\forall x>0$.

f) Din inegalitatea mediilor avem:

$$1\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\leq\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}\right)^n=$$

$$=\left(1+\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{n}\right)^n;\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{n}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}}=e^0=1.$$

Folosind teorema cleştelui obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$.

g) Cum $I_n(n)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(n)=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 7

Subiectul I.

1. $\frac{1+2+...+8}{8}=4,5$.

2. $C_8^6=C_8^2=\frac{8\cdot 7}{2}=28$.

3. $2^8=256$.

4. Prin numărare directă se obţin 12 elemente.

5. Prin numărare directă se obţin 12 progresii.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{e^x}=0$, deci $y=0$ este asimptota orizontală la graficul funcţiei f către $-\infty$.

8. Cum $f''(x)=e^x(x^2+5x+4)$, obţinem tabelul alăturat, deci graficul funcţiei f are 2 puncte de inflexiune.

x	$-\infty$		-1		-4		∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

9. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice că $f^{(n)}(x)=e^x(x^2+(2n+1)x+n^2)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ şi $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Verificarea fiind făcută, să arătăm că $P_n\Rightarrow P_{n+1}$.

Avem $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=[e^x(x^2+(2n+1)x+n^2)]'=$

$=e^x(x^2+(2n+1)x+n^2+2x+2n+1)=e^x(x^2+(2n+3)x+(n+1)^2)$, deci propoziţia este adevărată, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

10. Cum $f^{(n)}(0)=n^2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, vom avea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(0)+f''(0)+...+f^{(n)}(0)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

Subiectul II.

11. $90°$.

12. $\frac{5}{2}$.

13. 6.

14. $\frac{7}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. $\frac{47}{5}$.

16. 1.

Subiectul III.

a) $f(-1) = 4, f(1) = -2$, deci $f(-1)f(1) = -8$.

b) Dacă polinomul f ar avea rădăcina $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ cu $(p, q) = 1$, atunci $p \mid 1$ și $q \mid 1$, de unde rezultă că $r \in \{\pm 1\}$. Cum $r = 1$ și $r = -1$ nu sunt rădăcini, rezultă că polinomul f nu are rădăcini raționale.

c) Cum $f(-\infty) = -\infty$, $f(-1) = 4$, $f(1) = -2$ și $f(\infty) = \infty$, polinomul f va avea 3 rădăcini reale.

d) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

e) Scriem că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcini ale polinomului $f: x_1^3 - 4x_1 + 1 = 0$; $x_2^3 - 4x_2 + 1 = 0$ și $x_3^3 - 4x_3 + 1 = 0$. Înmulțind relațiile anterioare cu x_1^k, x_2^k respectiv x_3^k și adunându-le, obținem $S_{k+3} - 4S_{k+1} + S_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

f) Cum $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 10$, relația $S_n \in \mathbb{Z}$ va fi adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, verficarea fiind făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Din relația anterioară, avem $S_{n+1} = 4S_{n-1} - S_{n-2} \in \mathbb{Z}$, ceea ce trebuia arătat.

Subiectul IV.

a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

b) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

c) Utilizând metoda integrării prin părți, obținem

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\, dx =$$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. De aici rezultă $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

d) Cum $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = I_n$ și $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \geq \frac{n}{n+1} I_n$, rezultă că $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Din relațiile de la d) rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

f) Din e) și relația din ipoteză rezultă $\lim_{n\to\infty} (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1$, de unde obținem că $\lim_{n\to\infty} w_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 8

Subiectul I.

1. $\det A = 0$.

2. $\text{rang}A = 2$ deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ este un minor de ordin 2 nenul.

Analog, $\text{rang}B = 2$ şi obţinem $\text{rang}A + \text{rang}B = 4$.

3. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi suma elementelor lui AB este 1.

4. $AB^2 = O_3 \Rightarrow n = 2$.

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (BA)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (BA)^3 = O_3 \Rightarrow p = 3. \text{ Deci } n - p = -1.$$

5. Cum $n = 2$ şi $p = 3$, $np = 6$.

6. $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$.

7. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

8. Notăm cu $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Din egalitatea de la exerciţiul 7 obţinem $2l = 0$, deci $l = 0$.

9. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. Fie $f(x) = \frac{x}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$; $g'(x) = x^{n-1} \Rightarrow g(x) = \frac{x^n}{n}$.

Avem $I_n = \frac{x^{n+1}}{n(x+1)}\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$, deci $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$.

10. Folosind exerciţiul **9.** obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)}dx = 0$,

$\frac{1}{1+x^2}$ fiind continuă pe [0, 1], deci mărginită.

Subiectul II.

11. C_{10}^3.

12. $x = y = z$.

13. $\sqrt{27}$.

Scanned with OKEN Scanner

14. 0.

15. 0.

16. 0.

Subiectul III.

a) Conform relațiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

b) $f(1) \cdot f(-1) = -1 \cdot 5 = -5$.

c) Fie $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f, $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Atunci din $q \mid 1$ și $p \mid 1$ rezultă $p, q \in \{\pm 1\}$, deci singurele rădăcini raționale posibile ar fi ± 1; Acestea nu sunt rădăcini pentru f, deci f nu are rădăcini raționale.

d) x_i rădăcină pentru f implică $x_i^4 = 3x_i - 1$, $\forall i = \overline{1, 4}$. Atunci $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 4 = -4$.

e) Presupunem că $f\left(\frac{p}{q}\right) = k \in \mathbb{Z}$ unde $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Considerăm polinomul $g = f - k$, deci $g\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - k = 0$. Rezultă că $\frac{p}{q}$ este rădăcină a lui g, deci $q \mid 1$, de unde $q \in \{\pm 1\}$. În concluzie $\frac{p}{q} = \pm p \in \mathbb{Z}$, fals. Prin urmare, $f\left(\frac{p}{q}\right) = k \in \mathbb{Z}$ nu are soluție, deci $\{x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$ este vidă.

f) Conform raționamentului de la exercițiul e) putem spune că, dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $f(r) \in \mathbb{Z}$, atunci $r \in \mathbb{Z}$. Observăm că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, $f(k)$ este impar.

Dacă $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, atunci $f(r) \notin \mathbb{Z}$. Dacă $r \in \mathbb{Z}$, atunci $f(r)$ este impar.

Deoarece $f(1) = -1$ și f continuă, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ implică $\mathbb{N} \subseteq \text{Im}(f)$, adică $\text{Im}(f)$ conține o infinitate de numere pare. Cum acestea nu pot fi atinse decât în puncte iraționale, rezultă că mulțimea $\{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \mid f(x) \in \mathbb{N}\}$, este infinită.

Subiectul IV.

a) $f^{(5)}(x) = \cos x - 1$.

b) Se verifică prin calcul direct

c) Deoarece $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)}(x)$, $\forall\, n > 5$, rezolvând limita cu ajutorul teoremei lui l'Hospital, obținem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^7} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\cos x}{7!} = \frac{-1}{7!}$.

d) Din b) se deduce ușor că $f^{(5)}(x) \leqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Din b) rezultă $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(5)}(0) = 0$.

Obținem tabelul alăturat:

x	$-\infty$		-2π		0		2π	∞
$f^{(5)}(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$-$
$f^{(4)}(x)$		$+$	$\searrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$	$-$
$f^{(3)}(x)$		$-$	$\nearrow$	$-$	0	$-$	$\searrow$	$-$
$f^{(2)}(x)$		$+$	$\searrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$	$-$
$f'(x)$		$-$	$\nearrow$	$-$	0	$-$	$\searrow$	$-$
$f(x)$		$+$	$\searrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$	$-$

Deci $f(x) < 0$ pentru $x > 0$, adică $\sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $\forall x \geqslant 0$ și $f^{(2)}(x) \leqslant 0, \forall x \geqslant 0$, adică $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$.

f) Aria suprafeței plane respective este $\int_0^1 |g(x)|dx$. Folosind e), obținem $x^2 - \frac{x^6}{6} \leqslant \sin(x^2) \leqslant x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin integrare, rezultă că

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right)dx \leqslant \int_0^1 \sin(x^2)dx \leqslant \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 \leqslant \int_0^1 \sin(x^2)dx \leqslant \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 + \frac{1}{120}\cdot\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$\frac{13}{42} \leqslant \int_0^1 \sin(x^2)dx \leqslant \frac{2867}{9240} \Rightarrow 0{,}30 \leqslant \int_0^1 \sin(x^2)dx \leqslant 0{,}3102$, rezultă că aria este cuprinsă în intervalul $(0{,}30;\ 0{,}32)$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică

Varianta 9

Subiectul I

1. Sunt $2^3 = 8$ numere.

2. Suma este $\hat{3}$.

3. Produsul este $\hat{6}$.

4. Ecuația devine $x^2 = x$, deci are 2 soluții.

5. Sunt 5 numere pare, deci probabilitatea este 0,5.

6. $f'(x) = 3x^2$.

7. $\int_0^1 f(x)dx = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

8. $f''(x) = 6x$, deci avem 1 punct de inflexiune.

9. $f'(1) = 3$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{4}$.

Subiectul II

11. 1.

12. -1.

13. $5\vec{i} + 5\vec{j}$.

14. $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

15. O infinitate.

16. $3x + 4y = 25$.

Subiectul III

a) $f(0) = f(0) + f(0)$ sau $f(0) = 0$.

b) Dacă punem $y = -x$, rezultă $f(0) = f(x) + f(-x)$ sau $f(-x) = -f(x)$.

c) Pentru $n = 1$ și $n = 2$ este evident. Să arătăm acum $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

$$f(a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}) \underset{(ip)}{=} f(a_1 + \ldots + a_n) + f(a_{n+1}) \underset{(P_n)}{=} f(a_1) + \ldots + f(a_n) + f(a_{n+1}).$$

d) Din c) rezultă $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru $x = \frac{1}{n}$, obținem $1 = f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ sau $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

e) Din b) și c) obținem ușor că $f(k) = k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Fie $x \in \mathbb{Q}$; $x = \frac{p}{q}$ cu $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $p = qx$ și $f(p) = f(qx) = qf(x)$. Dar, $f(p) = p$, deci $f(x) = \frac{p}{q}$ sau $f(x) = x$.

Scanned with OKEN Scanner

f) Presupunem că există $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) \neq x$. Atunci $f(x) < x$ sau $f(x) > x$.

Dacă $f(x) < x$, considerăm $r \in \mathbb{Q}$, astfel încât $f(x) < r < x$. Din ipoteză rezultă $f(r) \leqslant f(x)$ sau $r \leqslant f(x)$, fals.

Dacă $f(x) > x$, considerăm $r \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x < r < f(x)$. Din ipoteză rezultă $f(x) \leqslant f(r)$ sau $f(x) \leqslant r$, fals. Deci $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} =$

$= \frac{-x^2 - 2x - \frac{3}{4} + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{+\frac{1}{4}}{(x+1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ și

$g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+\frac{5}{3}} + \frac{1}{x+\frac{2}{3}} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)} = \frac{-x^2 - 2x - \frac{10}{9} + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)} =$

$= \frac{-\frac{1}{9}}{(x+1)^2\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}$.

b) Evident, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

c) Din a) rezultă $f'(x) > 0$, $\forall\, x > 0$ și $g'(x) < 0$, $\forall\, x > 0$.

d)

x	0		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		0

și

x	0		∞
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$\searrow$		0

Rezultă $f(x) < 0$, $\forall\, x > 0$ și $g(x) > 0$, $\forall\, x > 0$.

e) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(n+\frac{5}{2}\right) + \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) = g(n) > 0$, deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător și $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) + \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) = f(n) < 0$, deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

f) Cum $b_n - a_n = \ln\left(n+\frac{2}{3}\right) - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) > 0$, rămâne să arătăm că $b_n - a_n < \frac{1}{6n}$. Din teorema lui Lagrange aplicată funcției $f(x) = \ln x$ pe intervalul $\left[n+\frac{1}{2}, n+\frac{2}{3}\right]$, deducem că există $c \in \left(n+\frac{1}{2}, n+\frac{2}{3}\right)$ astfel încât $\frac{\ln\left(n+\frac{2}{3}\right) - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+\frac{2}{3} - n - \frac{1}{2}} = f'(c) = \frac{1}{c}$, adică

$b_n - a_n = \frac{1}{6c} < \frac{1}{6\left(n+\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{6n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică

Varianta 10

Subiectul I

1. $\hat{3}^4 = \hat{1}$.

2. Ecuația are 2 soluții.

3. $C_5^4 = 5$.

4. Suma este $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$.

5. Probabilitatea este 0,3.

6. $f'(x) = 5x^4 + 1$.

7. $f'(1) = 6$.

8. Cum f este strict crescătoare, nu are puncte de extrem local.

9. Cum $f''(x) = 20x^3$, rezultă că funcția are 1 punct de inflexiune.

10. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

Subiectul II

11. 1.

12. 4.

13. $\frac{1}{12}$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 2.

16. 0.

Subiectul III

a) Dacă $z = a + bi$ și $w = c + di$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci $\overline{z+w} = a+c-i(b+d) = \overline{z} + \overline{w}$, iar $\overline{z \cdot w} = ac - bd - i(ad+bc) = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

b) Rezultă din a)

c) Rezultă din $\overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

d) Cum $f \circ f = 1_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$, rezultă că funcția f este inversabilă și inversa sa este f.

e) $g_A(X+Y) = A(X+Y)A^{-1} = AXA^{-1} + AYA^{-1} = g_A(X) + g_A(Y)$.

Apoi $g_A(XY) = AXYA^{-1} = AXA^{-1}AYA^{-1} = g_A(X) \cdot g_A(Y)$; $g_A(X) = g_A(Y)$ ne conduce la $AXA^{-1} = AYA^{-1}$ sau $X = Y$, deci g_A este injectivă, iar $g_A(X) = Y$ ne conduce la

Scanned with OKEN Scanner

$AXA^{-1} = Y$ sau $X = A^{-1}YA$, deci g_A este bijectivă.

f) Fie $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$; $f(J) = -J$, iar $g_A(J) = J$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversabilă.

Deci $f \neq g_A$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversabilă.

Subiectul IV

a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt = e^x - 1$.

b) $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x (e^t - 1)dt = e^x - 1 - x$.

c) Cum verificarea este făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

$$f_{n+2}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt = \int_0^x \left(e^t - 1 - \frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \ldots - \frac{t^n}{n!} \right) dt = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = 0$, rezultă că $y = 0$ este ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

e) Demonstrăm prin inducție matematică; pentru $n = 1$ este evident. Apoi, din $0 < f_n(t) \leqslant e^t \frac{t^n}{n!}$, $\forall t > 0$, integrând, rezultă

$$0 < \int_0^x f_n(t)dt \leqslant \int_0^x e^t \frac{t^n}{n!}dt \leqslant \int_0^x e^x \cdot \frac{t^n}{n!}dt = e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

f) Cum $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ și $f_n''(x) = f_{n-2}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem din e) că f_n este convexă pe $(0, \infty)$, $\forall n \geqslant 2$. Apoi se verifică ușor că f_0 și f_1 sunt convexe pe $\mathbb{R}$.

g) Cum $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă din e) că $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, $\forall x > 0$. Din această egalitate, obținem că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$, $\forall x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică

Varianta 11

Subiectul I

1. Restul este 0.

2. $C_5^2 = 10$.

3. Suma este $\hat{0}$.

4. Probabilitatea este 0,4.

5. Ecuația are 1 soluție.

6. $f'(x) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$.

7. $t = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})\Big|_0^1 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$.

8. Cum $f''(x) = 4(e^{2x} + e^{-2x}) > 0$, rezultă că nu are puncte de inflexiune.

9. $f'(0) = 0$.

10. Cum $f'(x) = 0$ are o soluție și derivata își schimbă semnul în jurul lui 0, avem 1 punct de extrem local.

Subiectul II

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. –0,7.

13. 6.

14. -2^{1002}.

15. 1.

16. 60°.

Subiectul III

a) Avem evident $\det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = 1$.

b) Cum $XY = A$, rezultă $S = O_3$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Se verifică ușor că $B\left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) = \left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) \cdot B = I_3$, deci B este inversabilă și $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$.

e) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U + V + W$ și

Scanned with OKEN Scanner

rang(U) = rang(V) = rang(W) = 1.

f) Utilizând proprietăţile determinanţilor, se arată uşor că det($C + D$) = 0, în vreme ce det(B) ≠ 0. Deci $C + D \neq B$.

Subiectul IV

a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt = \int_0^x (1-\cos t)dt = x - \sin x$.

b) $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x (t-\sin t)dt = \left(\frac{t^2}{2} + \cos t\right)\Big|_0^x = \frac{x^2}{2!} + \cos x - 1$.

c) Pentru $n = 0$, verificarea este făcută. Să demonstrăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$:

$f_{2n+3}(x) = \int_0^x f_{2n+2}(t)dt$. Apoi

$$f_{2n+2}(x) = \int_0^x f_{2n+1}(t)dt = \int_0^x \left(\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots + (-1)^n \frac{t}{1!} + (-1)^{n+1}\sin t\right)dt =$$

$= \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^2}{2!} + (-1)^{n+2}\cos x + (-1)^{n+1}$. De aici rezultă

$$f_{2n+3}(x) = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^3}{3!} + (-1)^{n+1}\frac{x}{1!} + (-1)^{n+2}\sin x.$$

d) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 1$, rămâne să calculăm $\lim\limits_{x\to\infty}(f_1(x) - x)$, care nu există, deci graficul funcţiei f_1 nu are asimptotă către $+\infty$.

e) Demonstrăm inductiv: pentru $n = 0$ este evident. Apoi, din $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 2 \cdot \frac{t^n}{n!}$, integrând de la 0 la x, avem $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant 2 \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

f) Fie $a_n = \frac{x^n}{n!}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} < 1$, deci a_n este monoton descrescător şi cum $a_n > 0$, rezultă a_n convergent. Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Din $a_{n+1} = \frac{x}{n+1} \cdot a_n$, rezultă $L = 0 \cdot L = 0$. Deci $L = 0$.

g) Din c), e) şi f) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n+1}(x) = 0$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n f_{2n+1}(x) = 0$ sau $\sin x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$, $\forall x > 0$. Când $n = 0$ este evident, iar când $x < 0$, egalitatea rezultă din imparitatea funcţiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 12

Subiectul I (30 p)

1. Sunt $\left[\frac{10}{2}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]-\left[\frac{10}{6}\right]=7$ numere care se divid cu 2 sau cu 3.

2. Probabilitatea este 0,4.

3. Inelul $\mathbb{Z}_9$ are 6 elemente inversabile față de înmulțire.

4. Grupul $(\mathbb{Z}_5, +)$ are 4 elemente de ordinul 5.

5. Există 6 funcții bijective.

6. Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

7. Funcția nu este derivabilă în 2 puncte.

8. Aria este $\frac{1}{6}$.

9. Concavă.

10. 0.

Subiectul II (20 p)

11. 0.

12. $\cos\frac{\pi}{5}$.

13. $x+y+z=1$.

14. (0, 0, 0).

15. $-\frac{3}{\sqrt{13}}$.

16. $\frac{1}{2}$.

Subiectul III (20 p)

a) Evident, $w_i(a_j)=0$, $\forall i\neq j\in\{1, 2, ..., n\}$.

b) Evident.

c) Evident.

d) Polinomul L_n este sumă de polinoame de grad $n-1$, deci va avea gradul cel mult $n-1$. Apoi $L_n(a_k)=b_k$, $\forall k=\overline{1,n}$, se verifică prin calcul direct.

e) Fie $g=f-L_n\in\mathbb{C}[X]$; evident, $\text{grad}(g)\leqslant n-1$. Apoi $g(a_k)=f(a_k)-L_n(a_k)=0$, $\forall k=\overline{1,n}$. Cum g are mai multe rădăcini decât gradul, rezultă $g\equiv 0$, deci $f=L_n$.

Scanned with OKEN Scanner

f) Dacă $f = 17X + 11$, $b_k = 17a_k + 11$, $\forall k = \overline{1,n}$, atunci $L_n(a_k) = b_k = f(a_k)$. Cum $\text{grad}(f) \leqslant n - 1$, din e) rezultă $f = L_n$, deci identitatea este demonstrată.

Subiectul IV (20 p)

a) $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1} - \alpha$.

b) Din $f'(x) = \alpha(x^{\alpha - 1} - 1)$, rezultă că $f'(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in (1, \infty)$.

c) Din b) rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $[0, 1]$ și strict descrescătoare pe $[1, \infty)$. Deci $f(x) \leqslant f(1), \forall x \geqslant 0$ sau $f(x) \leqslant 1 - \alpha$.

d) Punem $x = \frac{a}{b}$ și $\beta = 1 - \alpha$ în inegalitatea anterioară și rezultă cerința.

e) Notăm $a^\alpha = s$ și $b^\beta = t$, $\frac{1}{p} = \alpha$ și $\frac{1}{q} = \beta$, și rezultă cerința.

f) Dacă $s = \dfrac{a_k}{\left(a_1^p + \ldots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ și $t = \dfrac{b_k}{\left(b_1^q + \ldots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, din inegalitatea precedentă

rezultă $\dfrac{a_k b_k}{(a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \dfrac{a_k^p}{a_1^p + \ldots + a_n^p} \cdot \dfrac{1}{p} + \dfrac{b_k^q}{b_1^q + \ldots + b_n^q} \cdot \dfrac{1}{q}, \forall k = \overline{1,n}$.

Adunând aceste inegalități pentru $k = \overline{1,n}$, rezultă concluzia.

g) Considerăm $s = \dfrac{h(x)}{\left(\int_0^1 h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ și $t = \dfrac{g(x)}{\left(\int_0^1 g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}}$ și utilizăm inegalitatea de

la e). Rezuită $\dfrac{h(x)g(x)}{\left(\int_0^1 h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \dfrac{1}{p}\dfrac{h^p(x)}{\int_0^1 h^p(x)dx} + \dfrac{1}{q}\dfrac{g^q(x)}{\int_0^1 g^q(x)dx}$ pe care

integrând-o de la 0 la 1, vom obține cerința.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 13

Subiectul I (30 p)

1. Sunt $2^3 = 8$ numere.
2. $\hat{1}+\hat{2}+...+\hat{5}=\hat{3}$ în $\mathbf{Z}_6$.
3. $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot....\cdot\hat{6}=\hat{6}$ în $\mathbf{Z}_7$.
4. Ecuația $2^{x^2}=2^x$ are 2 soluții reale.
5. Probabilitatea este $\frac{5}{10}=0,5$.
6. $f'(x) = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
7. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$.
8. $f''(x)=6x$, deci avem un punct de inflexiune.
9. $f'(1)=3$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{4}$.

Subiectul II (20 p)

11. $\frac{1}{2}$.
12. 4.
13. 0.
14. $\frac{1}{6}$.
15. -1.
16. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Subiectul III (20 p)

a) Pentru $z = 1$ și $w = 0$, obținem $I_2 \in G$, iar pentru $z = w = 0$, obținem $O_2 \in G$.

b) Dacă $z = a + bi$ și $w = c + di$, atunci din $|z|^2+|w|^2=0$ rezultă $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ sau $a = b = c = d = 0$ sau $z = w = 0$.

c) Dacă $P=\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ și $Q=\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$, atunci $PQ=\begin{pmatrix} zu-w\overline{v} & zv+w\overline{u} \\ -\overline{w}u-\overline{z}\overline{v} & \overline{z}\overline{u}-\overline{w}v \end{pmatrix}$, adică

Scanned with OKEN Scanner

PQ este de forma $\begin{pmatrix} s & t \\ -\overline{t} & \overline{s} \end{pmatrix}$, deci $PQ \in G$.

d) Fie $D = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ și $E = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix}$. Atunci $DE = ED = I_2$, iar $E = D^{-1} \in G$.

e) Dacă $X = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, atunci $XC = \begin{pmatrix} -zi & wi \\ \overline{w}i & \overline{z}i \end{pmatrix}$ și $CX = \begin{pmatrix} -zi & -wi \\ -\overline{w}i & \overline{z}i \end{pmatrix}$, iar $XC \neq CX$ dacă $wi \neq -wi$, adică dacă $w \neq 0$. Deci luăm $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și rezolvăm problema.

f) Fie $AB = O_2$; dacă $\det(A) \neq 0$, atunci A este inversabilă și rezultă $B = O_2$. Dacă $\det(A) = 0$, rezultă din b) că $A = O_2$. Deci fie $A = O_2$, fie $B = O_2$.

g) Evident.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$.

b) $f(0) = 0$ și $f'(0) = 0$.

c)

x	-1		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Din c) rezultă $f(x) \leqslant 0$, adică $\ln(1+x) \leqslant x$, $\forall x > -1$. Apoi, dacă $x \geqslant 0$ avem $\ln(1+x) \geqslant \ln 1 = 0$.

e) $I_n = \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = x \cdot \ln(1+x^n)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

f) Cum $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$, $\forall x > 0$, rezultă $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leqslant \frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 14

Subiectul I (30 p)

1. $\hat{3}^4 = \hat{1}$.

2. Ecuația are 2 soluții.

3. $C_5^4 = 5$.

4. Suma este $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$.

5. Probabilitatea este 0,3.

6. $f'(x) = 5x^4 + 1$.

7. $f'(1) = 6$.

8. Cum f este strict crescătoare, nu are puncte de extrem local.

9. Cum $f''(x) = 20x^3$, rezultă că funcția are 1 punct de inflexiune.

10. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

Subiectul II (20 p)

11. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $x + y + z = 3$.

13. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$.

14. 2^{50}.

15. $\sqrt{29}$.

16. 0.

Subiectul III (20 p)

a) $\det(A) = 0$, rang $(A) = 2$, deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = O_3$.

c) Dacă $Y = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ și $YA = AY$, obținem $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, de

Scanned with OKEN Scanner

unde $a_2 = a_3 = b_3 = 0$, $a_1 = b_2 = c_3$ și $b_1 = c_2$, deci $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{C}$.

d) Din $\det(Z) = 0$, rezultă $a^3 = 0$, deci $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$ și, prin calcul direct, rezultă că $Z^3 = O_3$.

e) Dacă $U = O_3$ și $V = A$, atunci $f(U) = O_3 = f(V)$.

f) Presupunem că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care verifică $f(X) = A$ sau $X^3 = A$. Atunci $XA = X \cdot X^3 = X^3 \cdot X = A \cdot X$. De aici rezultă $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$. Cum $X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ a^3 & a^3 & 0 \\ a^3 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$ și $X^3 = A$, obținem $a = 0$, deci $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$.

De aici rezultă $X^3 = O_3 \neq A$, fals.

Deci ecuația $f(X) = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Subiectul IV (20 p)

a) $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

b) $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Apoi $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deci $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in [0, 1]$.

c) Din b) rezultă $0 \leq (x - x^2)^n \leq \frac{1}{4^n}$ sau $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) $I_n = x(x - x^2)^n \Big|_0^1 - n\int_0^1 (1 - 2x)x(x - x^2)^{n-1}$.

Se verifică ușor că $x - 2x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2x) + 2(x - x^2)$.

De aici rezultă

$$I_n = \frac{n}{2}\int_0^1 (x - x^2)^{n-1} - \frac{n}{2}\int_0^1 (1 - 2x)(x - x^2)^{n-1} - 2n\int_0^1 (x - x^2)^n = \frac{n}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}(x - x^2)^n \Big|_0^1 - 2nI_n.$$

Deci $(2n + 1)I_n = \frac{n}{2}I_{n-1}$ sau $I_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{2n + 1}I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

e) Pentru $n = 1$, avem $\frac{2}{3} < \sqrt{\frac{3}{5}}$, evident. Demonstrăm acum că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$; avem

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+3}<\sqrt{\frac{3}{2n+3}}\cdot\frac{2n+2}{2n+3}\leqslant\sqrt{\frac{3}{2n+5}}.$$

Avem de demonstrat ultima inegalitate, care prin notaţia $2n + 3 = x$, devine $\frac{x-1}{\sqrt{x}\cdot x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ sau $(x-1)\sqrt{x+2}\leqslant x\sqrt{x}$ sau $(x-1)^2(x+2)\leqslant x^3$, adică $x^3 - 3x + 2 \leqslant x^3$, adică $3x \geqslant 2$, adevărat.

f) Din d) rezultă inductiv că $I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

g) Din e) şi f) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}4^n I_n=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 15

Subiectul I (30 p)

1. $3^2 = 9$ numere.

2. Suma este $\hat{0}$ în $\mathbf{Z}_7$.

3. Produsul este $\hat{0}$ în $\mathbf{Z}_6$.

4. Ecuația are 2 soluții reale.

5. Probabilitatea este 0,5.

6. $f'(x) = 3x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

8. $f''(x) = 6x$, deci există un punct de inflexiune.

9. $f'(1) = 4$.

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^4} = \frac{1}{4}$.

Subiectul II (20 p)

11. C_{10}^2.

12. O infinitate.

13. 0.

14. $\frac{4\pi}{3}$.

15. $\frac{4x}{16} = 1$.

16. 2.

Subiectul III (20 p)

a) $S_1 = 0$ iar $S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2a$.

b) Cum $x_1^3 + ax_1 + b = 0$, $x_2^3 + ax_2 + b = 0$ și $x_3^3 + ax_3 + b = 0$, înmulțindu-le cu x_1^n, x_2^n și x_3^n și adunându-le rezultă $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Din b) rezultă $S_3 + aS_1 + bS_0 = 0$ sau $S_3 = -3b$ și $S_4 + aS_2 + bS_1 = 0$ sau $S_4 = 2a^2$.

d) Se verifică prin calcul direct.

e) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2a \\ 0 & -2a & -3b \\ -2a & -3b & 2a^2 \end{vmatrix} = -12a^3 + 8a^3 - 27b^2 = -4a^3 - 27b^2$.

Scanned with OKEN Scanner

f) Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $\Delta = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det^2(A) \geq 0$.

Fie acum $\Delta \geq 0$ și să arătăm că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Presupunem că $x_1 = c + di \notin \mathbb{R}$; atunci $x_2 = c - di$ și $x_3 = e \in \mathbb{R}$. Cum $\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 =$
$= (2di)^2(c - e + di)^2(c - e - di)^2 = -4d^2[(c - e)^2 + d^2] < 0$, fals. Deci $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Subiectul IV (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x) = 2 + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Deoarece $f'(x) = 2\dfrac{x^4 + 2x^2 + 1 + x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2}{(x^2+1)^2}\left[\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\right] > 0$,
$\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) $\int_0^1 f(x)dx = 1 - \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

e) Cum f este strict crescătoare, rezultă că este injectivă; apoi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, arată că f este surjectivă.

f) Fie $I = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} g(x)dx$; notăm $g(x) = t \Rightarrow x = f(t)$ și $dx = f'(t)dt$. Apoi $x = -1 \Rightarrow t = 0$ și $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow t = 1$. Deci $I = \int_0^1 t \cdot f'(t)dt = tf(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = \dfrac{3}{2} - \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

Matematică-informatică
Varianta 16

Subiectul I (30 p)

1. Sunt 2^5 submulţimi.

2. Ecuaţia are 2 soluţii.

3. Probabilitatea este $\frac{1}{3}$.

4. Sunt 2^3 funcţii.

5. Sunt $4! = 24$ permutări.

6. $f'(x) = 2004x^{2003}$.

7. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2005}$.

8. $f'(1) = 2004$.

9. Funcţia nu are puncte de inflexiune

10. Există 1 punct de minim local.

Subiectul II (20 p)

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

13. $x - 2y + z = 0$.

14. $\frac{1}{2}$.

15. $\frac{29}{38}$.

16. $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Subiectul III (20 p)

a) $\det(A) = +1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = I_3$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Cum $A^3 = I_3$ rezultă că A este inversabilă și inversa sa este A^2.

d) $UVA = UAV = AUV$, deci $UV \in C(A)$.

e) Considerăm matricea $X \in C(A)$, $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ și din egalitatea $XA = AX$, rezultă $\begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ sau $a_1 = b_2 = c_2 \overset{not}{=} a$, $b_1 = a_3 = c_2 \overset{not}{=} b$ și $c_1 = a_2 = b_3 \overset{not}{=} c$. Deci $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

f) Dacă $Y \in C(A)$, atunci $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ și cum

$$Y^3 = \begin{pmatrix} a^3+b^3+c^3+6abc & 3(a^2b+b^2c+c^2a) & 3(a^2c+b^2a+c^2b) \\ a^3+b^3+c^3+6abc & 3(a^2b+b^2c+c^2a) & 3(a^2c+b^2a+c^2b) \\ a^3+b^3+c^3+6abc & 3(a^2b+b^2c+c^2a) & 3(a^2c+b^2a+c^2b) \end{pmatrix}.$$

Rezultă $\begin{cases} a^3+b^3+c^3+6abc=0 \\ 3(a^2b+b^2c+c^2a)=0 \\ 3(a^2c+b^2a+c^2b)=0 \end{cases}$.

De aici rezultă $(a + b + c)^3 = 0$ sau $a + b + c = 0$.

Înlocuind $b + c = -a$ în prima relație, rezultă $ab(a + b) = 0$ sau $a = 0$ sau $b = 0$ sau $c = 0$.

Dacă $a = 0$, rezultă $b^2c = 0$, adică $b = 0$ sau $c = 0$ și din $a + b + c = 0$, rezultă $a = b = c = 0$. Alte situații conduc la același rezultat, deci $Y = O_3$.

Subiectul IV (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $x_n = 2n\pi \to \infty$ și $f(x_n) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}$ și $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to \infty$ și $f(y_n) = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$, deci nu există $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

c) Cum $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, rezultă $2 \leqslant 3 + \cos x \leqslant 4$ și $\frac{1}{4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Cum $F' = f \geqslant \frac{1}{2} > 0$, rezultă că primitiva I este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Se verifică prin derivare.

Scanned with OKEN Scanner

f) Cum $f(x) \geq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x \frac{1}{4}dt$ sau $F(x) \geq \frac{x}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deci $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

g) Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x + 2\pi) - F(x)$. Atunci $G'(x) = f(x + 2\pi) - f(x) = 0$, deci G este constantă şi $G(x) = G(0) = F(2\pi) - F(0)$. Considerăm acum $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $H(x) = F(x) - ax$, cu $a \in \mathbb{R}$, arbitrar. Alegem a, astfel încât $H(x + 2\pi) = H(x)$ sau $F(x + 2\pi) - a(x + 2\pi) = F(x) - ax$ sau $F(x + 2\pi) - F(x) = 2\pi a$ sau $a = \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi}$.

Deci $F(x) = H(x) + ax$, unde a este determinat mai sus, iar H este periodică cu perioada 2π.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = a$ rămâne să calculăm $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\infty} H(x)$ care nu există pentru că funcţia H este periodică şi neconstantă. Deci graficul funcţiei F nu are asimptotă către $+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 1

Subiectul I

1. Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

2. Deoarece $f(x)=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$, avem $f(x)\geq\frac{1}{2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

3. Cum $f(x)\geq\frac{1}{2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, rezultă că f nu are rădăcini reale.

4. Deoarece a este coeficientul lui X^4, avem $a = 1$.

5. Aplicăm identitatea de la punctul 4. în $x = 1$; $f(1) = a(1 - x_1) \ldots (1 - x_4)$ și cum $a = 1$, avem $f(1) = (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_4)$, adică $(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_4) = 3$.

6. Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

7. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $y=0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$.

8. $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=$

$$=\left(\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{3^2+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)^2+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Deci suma este $\frac{1}{2}-\frac{1}{2005^2+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1)+\ldots+f(n))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)=\frac{1}{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=2$.

Subiectul II

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. 2.

13. 2.

14. 0.

15. 0.

16. i.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A) = 1$.

b) Cum $I_2A = AI_2 = A$, rezultă că $I_2 \in G$ și analog $A \in G$.

c) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$, deci $XA^2 = A^2X$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(a+c) & -(b+d) \end{pmatrix}$ iar $BA = \begin{pmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{pmatrix}$.

Pentru ca $AB \neq BA$, luăm $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

e) Avem $A(aI_2 + bA) = aA + bA^2 = aA$ iar $(aI_2 + bA)A = aA + bA^2 = aA$, deci $aI_2 + bA \in G$.

f) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; egalitatea $XA = AX$ ne conduce la $\begin{cases} x+z = x-y \\ y+t = x-y \\ -x-z = z-t \\ -y-t = z-t \end{cases}$. Rezultă că

$\begin{cases} z = -y \\ t = x-2y \end{cases}$, adică $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x-2y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x-y)I_2 + yA$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$.

b) Pentru $n = 1$ s-a verificat la a). Să demonstrăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Avem

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = [e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))]' = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1) + 2x + 2n) =$

$= e^x(x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))$.

c) Se poate demonstra prin inducție sau, altfel: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

d) Avem $f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0) = 0 + 1 \cdot 2 + \ldots + (n-1)n = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3n^3} = \dfrac{1}{3}$.

e) Avem $\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - \left((2xe^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx\right) = e - 2e + 2e^x\Big|_0^1 = e - 2$.

f) Cum $f^{(n)}(0) = n(n-1)$, rezultă $f^{(n+1)}(0) = n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci putem lua $g = f'$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 2

Subiectul I

1. Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

2. $(x\circ y)\circ z=(x+2)(y+2)(z+2)-2=x\circ(y\circ z),\ \forall x, y, z\in\mathbb{R}$.

3. Pentru a găsi $a, b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$, egalăm $a\circ b$ cu un număr natural. Considerăm $a\circ b=(a+2)(b+2)-2=4$ de unde $(a+2)(b+2)=6$.

Alegem $a+2=\frac{12}{5}$ și $b+2=\frac{5}{2}$, adică $a=\frac{2}{5}$ și $b=\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ și $a\circ b=4\in\mathbb{N}$.

Procedând analog vom găsi o infinitate de perechi (a, b).

4. $(\log_2 x)\circ(\log_3 x)=-2\Leftrightarrow(\log_2 x+2)(\log_3 x+2)-2=-2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\log_2 x+2)(\log_3 x+2)=0\Leftrightarrow\begin{matrix}\log_2 x=-2\\ \log_3 x=-2\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=2^{-2}=\frac{1}{4}\\ x_2=3^{-2}=\frac{1}{9}\end{matrix}.$$

5. $2^x\circ 3^x=-2\Leftrightarrow(3^x+2)(2^x+2)-2=-2\Leftrightarrow(3^x+2)(2^x+2)=0$, de unde $2^x=-2$ care nu are soluție și $3^x=-2$ care nu are soluție, deci ecuația nu are soluție.

6. Se verifică prin calcul direct că expresia este 0.

7. $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

8. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

9. $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$,

deci $f(1)+\ldots+f(2004)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2006}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$.

Subiectul II

11. $5-6i$.

12. IV.

13. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

14. 2.

15. $x-y=0$.

16. $\frac{17}{5\sqrt{13}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) Pentru $a = 1$ şi $b = 0$ rezultă $I_2 \in G$, deoarece $a^2 - 3b^2 = 1$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$ şi $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix} \in G$. Deci $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ şi $a^2 - 3b^2 = 1$, $c^2 - 3d^2 = 1$. Atunci $AB = \begin{pmatrix} ac+3bd & ad+bc \\ 3(ad+bc) & ac+3bd \end{pmatrix}$ şi $x = ac + 3bd \in \mathbb{Q}$, iar $x^2 - 3y^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$, deci $AB \in G$.

c) Se verifică uşor că, dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$ atunci $\begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix} \in G$. Apoi se verifică uşor că $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix} = I_2$, deci cerinţa este rezolvată.

d) Cum $a^2 - 3b^2 = 1$, luăm $b = 1$ şi $a = 2$ şi obţinem matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Prin inducţie matematică, se arată că, dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, d > 0$, atunci $X^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$. Într-adevăr, cum verificarea este evidentă, $X^{n+1} = X^n X = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + cb_n & ba_n + db_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix}$ şi se vede că toate elementele sunt strict pozitive. În cazul nostru, rezultă că $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 3b_n & a_n \end{pmatrix}$ cu $a_n > 0$, $b_n > 0$, deci $B^n = I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

f) Cum $A \in G$, rezultă $A^2 \in G$ şi inductiv $A^n \in G$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\{A, A^2, \ldots A^n, \ldots\} \subset G$ şi $A^i \neq A^j$, $\forall\, i \neq j$ (în caz contrar, am avea $A^p = I_2$; imposibil).

Subiectul IV

a) Avem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ şi $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}$.

b) Cum $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Apoi, cum $g'(x) \leqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcţia g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Se vede uşor că $g(0) = 0$ şi cum g este funcţie strict monotonă, este injectivă, deci ecuaţia $g(x) = 0$ nu are decât soluţia $x = 0$.

d) Avem $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = \operatorname{arctg} a_n - a_n = g(a_n)$. Arătăm apoi inductiv că $a_n > 0$. Într-adevăr, cum $a_0 > 0$, avem $a_{n+1} = f(a_n)$ şi cum $a_n > 0$ rezultă $f(a_n) > f(0) = 0$, deci $a_{n+1} > 0$. Deoarece $a_n > 0$ avem $g(a_n) < g(0)$, deci $g(a_n) < 0$. Obţinem $a_{n+1} - a_n < 0$ şi atunci şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător şi mărginit.

e) Fie $L = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Avem $L = f(L)$ sau $g(L) = 0$, de unde obţinem $L = 0$. Deci $a_n \to 0$.

f) Avem $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\operatorname{arctg} a_n}{a_n} = 1$, deoarece $a_n \to 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 3

Subiectul I

1. $f(0) = 25$.

2. Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

3. Rezolvând ecuația $x^2 - 5x + 5 = 0$, obținem rădăcini reale. Deci polinomul f are 4 rădăcini reale.

4. Produsul $x_1 \dots x_4$ este egal cu 25.

5. Suma $x_1 + \dots + x_4$ este egală cu 10.

6. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ este asimptotă la graficul funcției f către $+\infty$.

7. $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Din tabela de variație, rezultă că $f(x) \in [0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci cel mai mic $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) < a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este $a = 1$.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

9. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)x^2 = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{x^2+1}\right) = -1$.

Subiectul II

11. 2.

12. $x + y = 0$.

13. $\dfrac{-1}{2}$.

14. -2^{1002}.

15. $3\sqrt{3}$.

16. 2.

Subiectul III

a) Pentru $a = 1$ și $b = 0$, $I_2 \in G$.

b) $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2 + b_2 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a_1, a_2 \in (0, \infty)$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Cum $a_1, a_2 \in (0, \infty)$, $a_1 \cdot a_2 \in (0, \infty)$. Evident, $b_1a_2 + b_2 \in \mathbb{R}$, deci $A \cdot B \in G$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Fie $C=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\in G$, $a\in(0,\infty)$, $b\in\mathbb{R}$. Fie $D=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{a} & 1 \end{pmatrix}\in G$ cu $\frac{1}{a}\in(0,\infty), \frac{-b}{a}\in\mathbb{R}$.

Evident $CD = DC = I_2$.

d) Fie $S, T\in G$, $S=\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} t & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$ cu $s, t\in(0,\infty), u, v\in\mathbb{R}$. Pentru ca $ST \neq TS$, trebuie ca $ut + v \neq vs + u$. Alegem $s = 1, t = 2, u = -1, v = 0$ și relația se verifică.

Prin urmare $S=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Se arată prin inducție că, dacă $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, atunci $X^n=\begin{pmatrix} x^n & 0 \\ x^{n-1}y+\ldots+xy+y & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru $n = 1$ este evident. Arătăm

$$P(n)\Rightarrow P(n+1):\ X^{n+1}=X^n\cdot X=\begin{pmatrix} x^n & 0 \\ x^{n-1}y+\ldots+xy+y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{n+1} & 0 \\ x^ny+\ldots+xy+y & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem de rezolvat ecuația $X^n=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, adică $x^n = a$ și $(x^{n-1} + \ldots + x + 1)y = b$, de unde rezultă $x=\sqrt[n]{a}\in(0,\infty)$ și $y=\frac{b}{x^{n-1}+\ldots+x+1}\in\mathbb{R}$, deci ecuația are soluție.

Subiectul IV

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Avem $f'(0)=g'(0)=0$.

c) Din tabela de semn rezultă $f(x) < 0$ și $g(x) > 0$, $\forall x>0$.

x	-1		0		∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

x	-1		0		∞
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	∞
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

d) Utilizăm formula primilor n termeni ai unei progresii aritmetice: rezultă

$$1+3+5+\ldots+2n-1=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2.$$

e) Pentru $n = 1$ se verifică ușor. Să arătăm acum $P_n\Rightarrow P_{n+1}$. Avem

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}.$$

Ultima egalitate se verifică prin calcul direct.

Scanned with OKEN Scanner

f) Din c) rezultă $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x, \forall\, x>0$. Vom avea

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{3}{n^2}-\frac{3^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)<\frac{3}{n^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2n-1}{n^2}-\frac{(2n-1)^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right)<\frac{2n-1}{n^2}$$

Adunând aceste inegalităţi rezultă (din d) şi e))

$$1-\frac{n(4n^2-1)}{2\cdot 3\cdot n^4}<\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right)<1.$$

Trecând la limită, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right)\right)=1.$

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 4

Subiectul I

1. Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

2. Polinomul f nu are rădăcini reale.

3. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

4. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$.

5. Polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, deci nu are divizori neconstanți de grad cel mult 3.

6. $f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcției f.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$.

9. $\int_0^1 f'(x) = f(x)\Big|_0^1 = e - 1$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

Subiectul II

11. $x + y = 1$.

12. -4.

13. $\sin 1°$.

14. 5.

15. I.

16. $30°$.

Subiectul III

a) Pentru $a = 1$ și $b = 0$, avem $a^2 - 2b^2 = 1$ și deci $I_2 \in G$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \in G$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} \in G$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ și $a^2 - 2b^2 = 1$, $c^2 - 2d^2 = 1$.

Atunci $AB = \begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix}$. Cum $(ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 =$

Scanned with OKEN Scanner

$= (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = 1$ și $ac + 2bd \in \mathbb{Q}$, $ad + bc \in \mathbb{Q}$, rezultă că $AB \in G$.

c) Deoarece $\det(X) = a^2 - 2b^2 = 1$, rezultă că matricea X este inversabilă și cum $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} = I_2$ și $\begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in G$, rezultă că $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}$.

d) Dorim ca $a^2 - 2b^2 = 1$ și luăm $a = 3$ și $b = 2$. Deci $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ verifică cerința

e) Arătăm inductiv că, dacă $X^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d > 0$, atunci $X^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$. Într-adevăr, pentru $n = 1$ este adevărat iar pentru demonstrația $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, observăm că $X^{n+1} = X^n \cdot X = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + cb_n & ba_n + db_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix}$.

De aici rezultă că $aa_n + cb_n > 0$, $ba_n + db_n > 0$, $ac_n + cd_n > 0$ și $bc_n + dd_n > 0$. Cum matricea B verifică ipoteza, rezultă că $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix}$ cu $b_n > 0$ și $a_n > 0$. Deci $B^n \neq I_2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deoarece $b_n > 0$.

f) Deoarece $\{B, B^2, ..., B^n\} \subset G$ și $B^i \neq B^j, \forall\, i \neq j$, rezultă că mulțimea G este infinită (dacă $i < j$ și $B^i = B^j$, rezultă $B^{j-i} = I_2$, fals).

Subiectul IV

a) Avem $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x}$.

b) $f(a) = 0$ și $f'(a) = \ln a - 1$.

c) Presupunem că $f(x) \geq 0, \forall\, x > 0$. Rezultă că $x = a$ este punct de minim local, deci din teorema lui Fermat, $f'(a) = 0$, adică $\ln a - 1 = 0$, $a = e$. Deci, în mod necesar, $a = e$. Avem $f(x) = x - e\ln x$.

Arătăm că, pentru $a = e$, $f(x) \geq 0, \forall\, x > 0$.

Avem tabelul de variație:

x	0		e		∞
$f'(x)$		$-\infty$	$-$	0	$+$	1
$f(x)$		∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Rezultă că $f(x) \geq 0, \forall\, x > 0$.

d) Din inegalitatea anterioară rezultă $x \geq e \cdot \ln x, \forall\, x > 0$, sau $e^x \geq x^e, \forall\, x > 0$.

e) Dacă $x = e$, este evident, iar dacă $e^x = x^e$, rezultă $f(x) = 0$ și din tabelul anterior, rezultă $x = e$.

f) Cum $c^x + b^x \geq x^c + x^b, \forall\, x > 0$, pentru $x = e$ avem: $c^e + b^e \geq e^c + e^b \geq c^e + b^e$. Deci $e^c + e^b = c^e + b^e$ și aceasta este posibil numai când $e^c = c^e$ și $e^b = b^e$, adică $c = e$ și $b = e$. Deci $c = b = e$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 5

Subiectul I

1. Cum $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, rezultă că rădăcinile sunt reale și strict pozitive.

2. Avem de rezolvat ecuația $x^4-5x^2+1=0$. Notăm $x^2=t$ și obținem $t^2-5t+1=0$ cu rădăcinile $t_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ și $t_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. Deci rădăcinile ecuației inițiale sunt:

$x_1=\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}$; $x_3=\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}$; $x_4=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}$. Prin urmare, f are patru rădăcini reale.

3. Dacă $\frac{p}{q}$ ar fi o rădăcină rațională a lui f, ar trebui ca $q\mid 1$ și $p\mid 1$, deci $\frac{p}{q}=\pm 1$, dar se observă ușor că acestea nu sunt rădăcini. Deci f nu are rădăcini raționale.

4. Utilizând relațiile lui Viète, avem $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

5. Dacă x_1 este rădăcină a lui f, atunci $-x_1$ este rădăcină a lui f. Exponenții la care apar rădăcinile în sumă fiind impari, rezultă că $x_1^{2003}+x_2^{2003}+x_3^{2003}+x_4^{2003}=0\in\mathbb{N}$.

6. $I_0(1)+I_0(2)+\ldots+I_0(2003)=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{de 2003 ori}}=2003$.

7. $I_1(x)=\int_0^x I_0(t)dt=\int_0^x 1dt=x$.

8. Vom demonstra prin inducție propoziția: $P(n)$: $I_n(x)=\frac{x}{n!}$, $\forall n\geq 1$.

$P(1)$: $I_1(x)=\frac{x}{1!}=x$, adevărat. Verificarea fiind făcută, vom demonstra $P(n)\to P(n+1)$.

$$P(n+1):I_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Rightarrow\int_0^x I_n(t)dt=\int_0^x\frac{t^n}{n!}dt=\frac{1}{n!}\int_0^x t^n dt=\frac{1}{n!}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

rezultă $I_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $\forall n\geq 1$. Prin urmare $I_{10}(x)=\frac{x^{10}}{10!}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n+2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}I_n(x)=0$.

10. Cum $I_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leq$

$\leq 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=3-\frac{1}{n+1}<3$. Atunci

Scanned with OKEN Scanner

$0 \leqslant \frac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n} \leqslant \frac{3}{n}$ și de aici rezultă că $\lim \frac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n} = 0$.

Subiectul II

11. 0.

12. 0.

13. $-5 + 12i$.

14. 2.

15. $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

16. $\sin\frac{3\pi}{5}$.

Subiectul III

a) Se arată prin calcul direct că $A^2 = O_2$.

b) $\det A = 0$.

c) Se vede ușor că $\text{rang}(A) = 1$.

d) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $AX = XA$ obținem $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $c = 0$ și $a = d$. Deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{C}$.

e) Din $Y^2 = A$ rezultă că $\det(Y^2) = \det A = 0$, deci $\det(Y) = 0$. Cum $Y^2 = A$ rezultă că $YA = AY$, deoarece $YA = Y^3 = AY$. Folosind exercițiul d), obținem $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{C}$. Din $\det(Y) = 0$ rezultă $a^2 = 0$ și deci $a = 0$. Prin urmare $Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $b \in \mathbb{C}$, deci $Y^2 \neq O_2$, ceea ce arată că ecuația nu are soluție.

f) Din $A^2 = O_2$ rezultă că $A_n = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ are proprietatea $A_n^2 = O_2$, deci $X^2 = O_2$ are o infinitate de soluții.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{arctg}\, x - x + \frac{x^3}{3}}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{1+x^2}}{5x^4} = \frac{1}{5}$ (am folosit teorema lui l'Hospital).

Scanned with OKEN Scanner

c) $g'(x)=f'(x)-x^4=-\frac{x^6}{1+x^2}$.

d) Se verifică ușor că $f'(0)=g'(0)=0$.

e) Pentru $x\in(0,\infty)$ avem $f(x)>0$ și $g(x)<0$, de unde obținem $\operatorname{arctg}x>x-\frac{x^3}{3}$ și $\operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$.

f) Prin integrarea de la 0 la 1 a inegalităților de la exercițiul e) obținem

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{12}-0\right)<\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx<\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{30}\Leftrightarrow\frac{5}{12}<\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx<\frac{27}{60}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}41<\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx<0{,}45.\ \text{Deci}\ \int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx\in(0{,}41;\,0{,}45).$$

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 6

Subiectul I

1. Notăm cu $e \in \mathbb{R}$ elementul neutru al legii; avem $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + e + 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = -1$. Deci -1 este elementul neutru.

2. Notăm cu x' simetricul elementului x față de legea „$\circ$". Atunci $x \circ x' = x + x' + 1 = -1$, de unde $x' = -2 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. $(-10) \circ (-9) \circ ... \circ 0 \circ ... \circ 10 = -10 + (-9) + ... + 9 + 10 + 20 = 20$.

4. $4^x \circ 2^x = 21 \Leftrightarrow 4^x + 2^x + 1 = 21$. Notăm 2^x cu t și obținem $t^2 + t - 20 = 0$ de unde $t_1 = 4$ și $t_2 = -5$; din $2^x = 4$ rezultă $x = 2$, iar $2^x = -5$ nu are soluție. Deci ecuația are o singură soluție reală.

5. Ecuația se mai scrie $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = 1$, $x \in [2, 3]$. Prin ridicare la pătrat, ea devine $x - 2 + 3 - x + 2\sqrt{x-2}\sqrt{3-x} = 1$, care are soluțiile $x = 2$ și $x = 3$. Deci suma soluțiilor este 5.

6. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală la graficul lui f.
$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$, deci $x = -2$ este asimptotă verticală la graficul lui f.
Deci graficul funcției f are două asimptote verticale.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -\dfrac{3}{4}$.

8. Se arată prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

9. $f(1) + f(2) + ... + f(n) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

10. $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + f(2) + ... + f(n)) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2} \right) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Subiectul II

11. 1.

12. 2.

13. 90.

14. 52.

15. $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Scanned with OKEN Scanner

16. $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$.

Subiectul III

a) $AB-BA=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

b) $\det A=-1$.

c) $A^2=I_2$.

d) $A^2=I_2\Rightarrow A^{-1}=A$.

e) $X=I_2+A+A^2+\ldots+A^{2003}=(I_2+A)+(I_2+A)+\ldots+(I_2+A)=1002(I_2+A)=$

$=1002\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det X=0\Rightarrow \operatorname{rang} X=1$.

f) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, deci AB are numai elemente pozitive nenule. Prin ridicare la putere AB va avea numai elemente pozitive nenule, deci $(AB)^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Subiectul IV

a) $f_0(\pi)=\cos\pi=-1$.

b) Dacă $x_n=2n\pi$, atunci $f_0(x_n)=1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_0(x_n)=1$. Dacă $y_n=2n\pi+\pi$, atunci $f_0(y_n)=-1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_0(y_n)=-1$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x)$ nu există.

c) $f_1(\pi)=f_0(\pi)=-\sin\pi=0$.

d) $\int_0^{2\pi} f_1(x)dx=\int_0^{2\pi}(-\sin x)dx=-\int_0^{2\pi}\sin x dx=\cos x\Big|_0^{2\pi}=0$..

e) $f_0(x)=\cos x$; $f_1(x)=-\sin x$; $f_2(x)=-\cos x$; $f_3(x)=\sin x$; $f_4(x)=\cos x$.
Deci valoarea funcției se repetă din 4 în 4, rezultă $f_{10}(x)=f_2(x)=-\cos x$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)}{n}=0$ deoarece numărătorul este constant, putând lua una din valorile 0, $\cos x$, $\cos x-\sin x$, $-\sin x$. Cum numitorul tinde la ∞, rezultă fracția tinde la 0.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 7

Subiectul I

1. $f(-1)+f(1)=-4$.

2. Dacă polinomul f are rădăcina rațională $r=\frac{p}{q}$ cu $(p, q)=1$, atunci $p \mid 1$ și $q \mid 1$, deci $r \in \{\pm 1\}$. Cum 1 și -1 nu sunt rădăcini pentru f, rezultă că polinomul f nu are rădăcini raționale.

3. Cum $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, rezultă că rădăcinile sunt reale și, calculându-le, vor fi și pozitive.

4. Suma este 0.

5. Produsul este 1.

6. Se verifică ușor că $f(0)=f(1)$.

7. Se verifică ușor că funcția f are perioada $t = 1$.

8. Cum $f(x)=\begin{cases}x(1-x), x\in[0;1)\\-(x+1)x, x\in[-1;0)\end{cases}$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

9. Cum funcția este continuă în $x = 0$ și are perioada 1, iar pe intervalul $[0, 1)$ este continuă, ea va fi continuă pe $\mathbb{R}$.

10. $\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 x(1-x)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=0,1(6)$.

Subiectul II

11. $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$.

12. 2.

13. cos1.

14. 1.

15. 1.

16. 3.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) $x\circ(y\circ z)=\dfrac{x+y\circ z}{1+x(y\circ z)}=\dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\dfrac{y+z}{1+yz}}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$ și analog se obține că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$, $\forall x, y, z\in G$.

b) $(f\circ g)(x)=\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}=\dfrac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{2x}{2}=x$, $\forall x>0$.

c) Din b) și din $(g\circ f)(x)=x$, $\forall x\in(-1,1)$, rezultă că inversa funcției f este g.

d) $f(x\circ y)=\dfrac{1-x\circ y}{1+x\circ y}=\dfrac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}=\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}=f(x)f(y)$, $\forall x, y\in G$.

e) Arătăm inductiv că $f(x_1\circ\ldots\circ x_n)=f(x_1)\ldots f(x_n)$. Pentru $n=2$ s-a arătat la d) Arătăm acum că $P_n\Rightarrow P_{n+1}$. Avem $f(x_1\circ\ldots\circ x_n\circ x_{n+1})=f(x_1\circ\ldots\circ x_n)f(x_{n+1})=$ $=f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n)f(x_{n+1})$.

f) Fie $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{2000}\circ\dfrac{1}{2002}=x$; atunci

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{1}{2000}\right)f\left(\frac{1}{2002}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\frac{1}{2000}}{1+\frac{1}{2000}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2002}}{1+\frac{1}{2002}}=$$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1999}{2001}\cdot\dfrac{2001}{2003}=\dfrac{1}{2003}$. Din relația $f(x)=\dfrac{1}{2003}$, rezultă

$$x=g\left(\frac{1}{2003}\right)=\frac{1-\frac{1}{2003}}{1+\frac{1}{2003}},\ \text{adică}\ x=\frac{2002}{2004}.$$

Subiectul IV

a) Suma cerută este 2003.

b) $I_1(x)=\int_0^x dt=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}(I_1(x)-x)=0$, rezultă că $y=x$ este asimptota oblică a funcției $I_1(x)$ către $+\infty$.

d) Arătăm prin inducție matematică egalitatea $I_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Pentru $n=1$ s-a verificat; să arătăm că $P_n\Rightarrow P_{n+1}$. Avem

$$I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)\,dt=\int_0^x\frac{t^n}{n!}dt=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_0^x=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$ ceea ce trebuia arătat.

Scanned with OKEN Scanner

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Într-adevăr, fie $x>0$ și $a_n=\frac{x^n}{n!}$. Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}<1$ deci $a_{n+1}<a_n$, $\forall\, n\geq n_0$. Rezultă că șirul este descrescător și cum $a_n>0$, șirul este mărginit. Deoarece $a_{n+1}=\frac{x}{n+1}\cdot a_n$, trecând la limită obținem $L=0\cdot L$ sau $L=0$. Când $x=0$ este evident, iar pentru $x<0$ se observă că $\frac{x^n}{n!}=(-1)^n\frac{(-x)^n}{n!}$ care are limita 0.

f) $0<\frac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n}=\frac{1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}}{n}<\frac{3}{n}$, de unde

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_0(1)+I_1(1)+\ldots+I_n(1)}{n}=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera teoretică, specializarea științe ale naturii
Filiera tehnologică, profilul tehnic, toate specializările
Varianta 8

Subiectul I

1. $y_1 + y_2 = -1$, conform relațiilor lui Viète.

2. $f : g = X^2$ rest $X + 1$.

3. $(X-1)f = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^5 - 1$.

4. Conform relațiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$.

5. $f(y_1)\cdot f(y_2) = (g(y_1)\cdot y_1^2 + y_1 + 1)(g(y_2)\cdot y_2^2 + y_2 + 1) = (y_1+1)(y_2+1) =$
$= y_1y_2 + y_1 + y_2 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$.

6. Se verifică prin calcul direct că $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x-1}{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x-1-x^3-x}{x^2+1} = 0$.

Deci asimptota oblică la graficul lui f este $y = x$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

9. $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \dfrac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \dfrac{1}{x^2+1}dx = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 =$
$= \dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

10. $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+2x^2+1+2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+x^2+(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} =$
$= \dfrac{x^4+x^2+(x+1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Subiectul II

11. 16.

12. C_5^2.

13. –3.

14. $\cos 10°$.

15. 108°

16. 2.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) $\hat{x}$ şi $\hat{y}$ pot lua fiecare câte 3 valori, deci mulţimea G are 9 elemente.

b) $\hat{x}=\hat{0}\Rightarrow\hat{y}=\hat{0}$; $\hat{x}=\hat{1}\Rightarrow\hat{y}^2=\hat{2}$, care nu are soluţie în $\mathbf{Z}_3$;
$\hat{x}=\hat{2}\Rightarrow\hat{y}^2=\hat{2}$, care nu are soluţie în $\mathbf{Z}_3$. Deci singura soluţie este $(\hat{0},\hat{0})$.

c) Fie $X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ -\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{d}\\ -\hat{d} & \hat{c}\end{pmatrix}\in G$. Atunci $XY=\begin{pmatrix}\hat{a}\hat{c}-\hat{b}\hat{d} & \hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}\\ -\hat{a}\hat{d}-\hat{b}\hat{c} & \hat{a}\hat{c}-\hat{b}\hat{d}\end{pmatrix}\in G$.

d) $A^2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\Rightarrow A^4=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}=\hat{2}I_2$, deci $A^8=I_2$; numărul căutat este $n=8$.

e) Cum $\{O,I_2,A,...,A^7\}\subset G$ şi are acelaşi număr de elemente cu G, rezultă că mulţimile sunt egale.

f) Produsul este $A^{1+2+...+7}=A^{28}=A^4=\hat{2}I_2$.

Subiectul IV

a) $I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) $I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{1+x}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$. Fie $f(x)=\frac{x}{1+x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$; $g'(x)=x^{n-1}\Rightarrow g(x)=\frac{x^n}{n}$.

Avem $I_n=\frac{x^{n+1}}{n(x+1)}\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$, deci $nI_n=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$.

d) Cum $x^{n+1}\leqslant x^n$, $\forall x\in[0,1]$, rezultă că $\frac{x^{n+1}}{1+x}\leqslant\frac{x^n}{1+x}$, $\forall x\in[0,1]$, deci $I_{n+1}\leqslant I_n$.

e) Avem $0\leqslant I_n\leqslant\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

f) Analog, se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx=0$ şi din c) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Științe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 9

Subiectul I

1. Restul este 0.

2. $|x_1| = 1$.

3. $x_1^3 = 1$.

4. $S_3 = 2$.

5. Probabilitatea este 0,2.

6. $f'(x) = 3x^2 - 3$.

7. $f'(2) = 9$.

8. $f''(x) = 6x$, deci avem 1 punct de inflexiune.

9. 2 puncte de extrem local.

10. $d = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx = 2\int_{0}^{1}(3x - x^3) = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Subiectul II

11. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 0.

13. –9.

14. 3.

15. 1; –1; i.

16. 2.

Subiectul III

a) Pentru $a = b = 0$, obținem $O_2 \in G$, iar pentru $a = 1$ și $b = 0$, obținem $I_2 \in U(G)$

b) Evident.

c) Din $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ rezultă $A \cdot B \in G$.

d) Dacă $A \in U(G)$, există $B \in U(G)$, astfel încât $AB = I_2$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ rezultă $ac - bd = 1$ și $ad + bc = 0$. Ridicându-le la pătrat și adunându-le, obținem $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$, de unde $a^2 + b^2 = 1$, adică $\det(A) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Cum $a^2 + b^2 = 1$, rezultă $a = \pm 1$ și $b = 0$ sau $a = 0$ și $b = \pm 1$. Obținem 4 matrice posibile și fiecare verifică relația $A^n = I_2$.

f) Dacă $A \cdot B \cdot C \cdot D = I_2$ și A, B, C, D ar fi diferite, am obține $A \cdot B \cdot C \cdot D = -I_2$, fals. Deci există două care sunt egale.

Subiectul IV

a) Evident.

b) $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$.

c)

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Din tabel rezultă cerința.

d) $f''(x) = (2^x + 2^{-x})(\ln 2)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln 2}}{2^x + 2^{-x}} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

f) Se observă că $x = 1$ este soluție. Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x > x^2$ și $f(x) > f(x^2)$ iar x^{21}, x^{1986}, de unde $f(x^{21}) > f(x^{1986})$.

Deci în acest caz avem $f(x) + f(x^{21}) > f(x^2) + f(x^{1986})$, adică $x \in (0, 1)$ nu este soluție.

Dacă $x > 1$, atunci $x < x^2$ și $x^{21} < x^{1986}$, care vor conduce la $f(x) + f(x^{21}) < f(x^2) + f(x^{1986})$, deci nici $x > 1$ nu poate fi soluție. Rezultă că $x = 1$ este soluție unică.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Științe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 10

Subiectul I

1. Ecuația are 4 soluții.

2. Inelul are 4 elemente inversabile.

3. $C_9^2 = 36$.

4. Suma este $\hat{0}$.

5. Probabilitatea este 0,3.

6. $f'(x) = 5x^4 - 5$.

7. $f'(0) = -5$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^5} = 1$.

9. Funcția are 2 puncte de extrem local.

10. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

Subiectul II

11. 1.

12. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13. IV.

14. $\dfrac{\sqrt{63}}{8}$.

15. 5.

16. 5.

Subiectul III

a) $\det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = 1$.

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ are soluțiile $\begin{cases} x_1 = -2a \\ x_2 = a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{C}$.

c) Dacă $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $AB = O_2$.

d) $CA = O_2$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Considerăm $D = BC = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ și verificăm ușor că $AD = DA = O_2$.

f) Se arată ușor prin inducție matematică. Pentru $n = 1$ este evident, iar $(A+X)^{n+1} = (A+X)^n(A+X) = (A^n + X^n)(A+X) = A^{n+1} + X^{n+1}$, deoarece $A^nX = X^nA = O_2$.

Subiectul IV

a) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + \mathscr{C}$.

b) Cum $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$ rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

c) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) > 0$, deci $(a_n)_n$ este un șir strict crescător.

d) Inegalitatea este echivalentă cu $2k^2 < (k+1)^3 - k^2(k+1)$ sau $2k^2 < 2k^2 + 3k + 1$, evident.

e) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} < 0$ din d). Deci $(b_n)_n$ este strict descrescător.

f) Cum $a_1 \leqslant a_n$, rezultă $1 \leqslant a_n$. Apoi, $a_n < b_n \leqslant b_3 = 1{,}22\ldots$, deci $a_n < 1{,}22$, $\forall\, n \geqslant 3$. Dar $a_1 < a_2 < a_3 < 1{,}22$, ceea ce rezolvă problema.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Științe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 11

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul I

1. $C_5^2 = 10$.

2. $3! + 3! = 12$.

3. 1.

4. -1.

5. -1.

6. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

7. $f'(0) = 0$.

8. 1 punct de extrem local.

9. $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Subiectul II

11. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

13. $1 - i$.

14. $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

15. $\sqrt{8}$.

16. $3 - 2i$.

Subiectul III

a) $a = b = 0 \Rightarrow O_2 \in G$ și $a = 1, b = 0 \Rightarrow I_2 \in G$.

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \in G$.

c) Evident.

d) $\det(X) = a^2 - b^2$. Dacă $a^2 - b^2 = 2$, atunci $(a - b)(a + b) = 2$, imposibil deoarece $a - b$ și $a + b$ au aceeași paritate.

e) $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ verifică cerința.

f) Fie $M=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\in G$; atunci $x^2-y^2=2004$ ne conduce la

$(x-y)(x+y)=2\cdot 1002$ sau $\begin{cases}x-y=2\\ x+y=1002\end{cases}$ sau $x=502$ și $y=500$.

Deci $M=\begin{pmatrix}502 & 500\\ 500 & 502\end{pmatrix}$ verifică cerința.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

c) $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, calculăm $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ și apoi

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$. Deci $y=-2x$ este asimptota oblică către $-\infty$ la graficul funcției f.

e) $f''(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

f) $I=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sqrt{t^2+1}-\dfrac{x^2}{2}=t\sqrt{t^2+1}\Big|_0^x-\int_0^x\dfrac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}-\dfrac{x^2}{2}=$

$=x\sqrt{x^2+1}-\int_0^x\sqrt{t^2+1}+\int_0^x\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt-\dfrac{x^2}{2}=x\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{2}-I+\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\dfrac{x^2}{2}$.

De aici rezultă $I=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 12

Subiectul I (30 p)

1. 45.

2. 2.

3. 4.

4. 2500.

5. $\frac{1}{2}$.

6. $f'(x) = e^{x^4} \cdot 4x^3$.

7. $f'(0) = 0$.

8. 1 punct de extrem local.

9. Nu există puncte de inflexiune.

10. $e - 1$.

Subiectul II (20 p)

11. sin2.

12. $\frac{bc}{2}$.

13. -1.

14. 8.

15. $x^2 + y^2 = 1$.

16. $\frac{5}{7}$.

Subiectul III (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) Dacă $g = (x-1)^2$, evident $g \in B$ şi $g(1-x) = g(1+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Presupunem că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $h(a-x) = h(a+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $h(0) = h(2a)$, sau $1 = 16a^4 + 2a + 1$, adică $2a(8a^3 + 1) = 0$. Deci fie $a = 0$, fie $a = -\frac{1}{2}$. Dacă $a = 0$, rezultă $h(-x) = h(x)$, fals, deoarece $h(1) \neq h(-1)$. Dacă $a = -\frac{1}{2}$, rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$h\left(-\frac{1}{2}-x\right)=h\left(-\frac{1}{2}+x\right)$, adică $\left(\frac{1}{2}+x\right)^4-\frac{1}{2}-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}+x+1$. De aici rezultă $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^4=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, fals, deoarece $\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^4\neq 2$.

e) Fie $w\in C$; atunci $w=u\circ v$, cu $u, v\in A$. Cum pentru v, există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $v(c-x)=v(c+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $(u\circ v)(c-x)=(u\circ v)(c+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $w(c-x)=w(c+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

f) Cum $h\in B$ şi $h\notin C$ (din punctul e)), rezultă că $B-C\neq\emptyset$.

Subiectul IV

a) Se verifică prin calcul direct

b) Se verifică prin calcul direct

c) Se verifică prin calcul direct

d) Avem $F(1)=5>0$, iar din c) şi din tabla următoare, rezultă că $F(x)>0$, $\forall x\neq 1$.

x	$-\infty$		1		∞
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^5-1		$-$	0	$+$	
$\frac{x^5-1}{x-1}$		$+$	$\vert$	$+$	

e) $F''(x)=12x^2+6x+2=12\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\right)=12\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{10}{6\cdot 16}\right)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci F este convexă.

f) $\sum_{k=1}^{n}f(k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+n=4\frac{n^2(n+1)^2}{4}+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}+n$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{F(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+n(n+1)+n}{n^4+n^3+n^2+n+1}=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Științe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 13

Subiectul I (30 p)

1. Restul împărțirii este 0.

2. Cum $x_1^3 = 1$, rezultă că $|x_1| = 1$.

3. $x_1^3 = 1$.

4. $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = 2$.

5. Probabilitatea este $\frac{1}{5} = 0,2$.

6. $f'(x) = 3x^2 + 3$.

7. $f'(2) = 15$.

8. $f''(x) = 6x$, deci $x = 0$ este punct de inflexiune.

9. Cum $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, nu există puncte de extrem local.

10. $\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (x^3 + 3x)dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$.

Subiectul II (20 p)

11. $\sqrt{b^2 + c^2}$.

12. 2sin2cos1.

13. $-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$.

14. $1 + \sqrt{5}$.

15. $\sqrt{2}$.

16. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Subiectul III (20 p)

a) $f(0) = i^{10} + i^{10} = -2$.

b) $a_{10} = C_{10}^0 + C_{10}^0 = 2$; $a_9 = C_{10}^1 \cdot i - C_{10}^1 i = 0$.

c) Suma coeficienților este $f(1) = (1 + i)^{10} + (1 - i)^{10} = (2i)^5 + (-2i)^5 = 0$.

d) $a_k = C_{10}^k i^k + C_{10}^k (-i)^k = C_{10}^k (i^k + (-i)^k)$.

Când k este par, $a_k \in \mathbb{R}$, iar când k este impar, $a_k = 0 \in \mathbb{R}$.

e) $f(z) = 0$ ne conduce la $(z + i)^{10} = -(z - i)^{10}$ sau $|(z+i)^{10}| = |-(z-i)|^{10}$ sau

Scanned with OKEN Scanner

$|z+i|^{10}=|z-i|^{10}$, de unde $|z+i|=|z-i|$.

f) Din e) rezultă $|z+i|=|z-i|$. Dacă $z = a + ib$, atunci $|a+i(b+1)|=|a+i(b-1)|$ sau $\sqrt{a^2+(b+1)^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$, de unde rezultă $b = 0$, adică $z = a \in \mathbb{R}$.

Subiectul IV (20 p)

a) $f'(x) = 2004(x + 1)^{2003} - 2004$.

b) $f(0) = 0$ și $f'(0) = 0$.

c) $f''(x) = 2004 \cdot 2003(x + 1)^{2002} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d)

x		-1		0		
$f'(x)$	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$-$	$\searrow$	$-$	0	$+$	$\nearrow$ $+$
$f(x)$		$+$	$\searrow$	0	$+$	$\nearrow$

Deci $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left((x+1)^{2004}-2004x-1\right)dx=\frac{(x+1)^{2005}}{2005}\Big|_0^1-\frac{2004}{2}x^2\Big|_0^1-x\Big|_0^1=$

$=\frac{2^{2005}-1}{2005}-1002-1=\frac{2^{2005}-1}{2005}-1003.$

f) Dacă $F(x) = (x + 1)^{2005} - 2005 \cdot 1002x^2 - 2005x - 1$, $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, atunci $F'(x) = 2005f(x)$, deci $F'(x) \geq 0$ și atunci $F(x) \geq F(0)$ sau $F(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 14

Subiectul I (30 p)

1. Restul împărţirii este 0.

2. $|x_1|=1$.

3. $x_1^3=-1$.

4. $S_3=x_1^3+x_2^3=-2$.

5. Probabilitatea este $\frac{1}{5}=0,2$.

6. $f'(x)=3x^2, \forall\, x\in\mathbb{R}$.

7. $f'(1)=3$.

8. $f''(x)=6x$, deci $x=0$ este punct de inflexiune.

9. Cum $f'(x)>0, \forall\, x\in\mathbb{R}^*$, funcţia nu are puncte de extrem local.

10. $\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1(x^3+3)dx=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$.

Subiectul II (20 p)

11. $\frac{11}{\sqrt{5}}$.

12. $\frac{1}{2}$.

13. 4.

14. $2+i$.

15. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

16. $x+y=3$.

Subiectul III (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Evident.

c) Din $f(\sqrt{5})=0$, rezultă $5-(a+d)\sqrt{5}+ad-bc=0$ şi cum $a, b, c, d\in\mathbb{Q}$, obţinem $a+d=0$ şi $ad-bc=-5$.

d) Considerăm $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi observăm că $B^2=5I_2$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Se arată prin calcul direct.

f) Din $\det(X^2 - 5I_2) = 0$, rezultă $\det(X - \sqrt{5}I_2) = 0$ sau $\det(X + \sqrt{5}I_2) = 0$. Dacă $\det(X - \sqrt{5}I_2) = 0$ obținem, luând $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, că $p + s = 0$ și $ps - rq = -5$, adică $X^2 = 5I_2$, iar dacă $\det(X + \sqrt{5}I_2) = 0$, vom obține aceeași concluzie.

Subiectul IV (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Cum $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$, iar $f'(x) > 0$ pe $(0, \infty)$ ne conduce la f strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

d) $f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 3^{-x} \ln^2 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{1}{\ln 3}$.

f) Se observă că $x = 1$ este soluție.

Dacă $x > 1$, atunci $x < x^5$ și $f(x) < f(x^5)$ iar $x^{27} < x^{1986}$ și $f(x^{27}) < f(x^{1986})$, deci $f(x) + f(x^{27}) < f(x^5) + f(x^{1986})$, $\forall x > 1$, deci nu avem soluție în intervalul $(1, \infty)$.

Dacă $x \in (0, 1)$, se procedează analog, și din nou nu avem soluție. Deci $x = 1$ este soluție unică.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 15

Subiectul I (30 p)

1. $\hat{x}^2 = \hat{x}$ are în $\mathbf{Z}_6$ soluţiile $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}\}$.

2. $U(\mathbf{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

3. $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

4. $\hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = \hat{3}$ în $\mathbf{Z}_6$.

5. Probabilitatea este $\frac{3}{10}$.

6. $f'(x) = 5x^4 - 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $f'(0) = -5$.

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^5} = 1$.

9. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x = 1$ şi $x = -1$, iar derivata îşi schimbă semnul în jurul lor, deci sunt puncte de extrem.

10. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

Subiectul II (20 p)

11. 1.

12. $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

13. 2cos2cos1.

14. $a^2\sqrt{3}$.

15. $-1 - i$.

16. 1.

Subiectul III (20 p)

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A) = -1$, $\text{rang}(A) = 3$.

c) Se verifică prin calcul direct că $A^2 = B^2 = I_3$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Din $A^2 = I_3$, rezultă că A este inversabilă și $A^{-1} = A$.

e) $X = A + A^2 + \ldots + A^{2004} = 1002(A + I_3) = 1002\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Deci $\det(X) = 0$.

f) Fie $(AB)^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cum a_1, b_1, c_1, d_1 sunt strict pozitive, deducem inductiv că a_n, b_n, c_n și d_n sunt strict pozitive. Deci $(AB)^n \neq I_3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV (20 p)

a) $f'(x) = 2004(x+4)^{2003} - 2004x^{2003}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(-2-x) + f(-2+x) = (2-x)^{2004} - (-2-x)^{2004} + (2+x)^{2004} - (-2+x)^{2004} = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Cum $f'(x) = 2004[(x+4)^{2003} - x^{2003}] > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deducem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Cum $f(-2) = 0$ și funcția f este strict monotonă, deci injectivă, rezultă că $x = -2$ este soluția unică.

e) $\int_{-4}^{0} f(x)dx = \frac{(x+4)^{2005}}{2005}\Big|_{-4}^{0} - \frac{x^{2005}}{2005}\Big|_{-4}^{0} = \frac{4^{2005}}{2005} + \frac{(-4)^{2005}}{2005} = 0$.

f) Cum $f''(x) = 2004 \cdot 2003 \cdot [(x+4)^{2002} - x^{2002}]$, avem $f''(x) > 0$ când $(x+4)^{2002} > x^{2002}$ sau $(x+4)^2 > x^2$ sau $4(2x+4) > 0$ sau $x > -2$. Deci funcția f este convexă pe $[-2, \infty)$ și concavă pe $(-\infty, -2]$.

Scanned with OKEN Scanner

Filiera Teoretică, sp. Ştiinţe ale naturii;
Filiera Tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
Varianta 16

Subiectul I (30 p)

1. 2^4.

2. 2.

3. $\frac{1}{2}$.

4. 4.

5. 2^{10}.

6. $f'(x) = 4x^3$.

7. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{5}$.

8. $f'(1) = 4$.

9. Funcţia f nu are puncte de inflexiune.

10. Există un punct de extrem local.

Subiectul II (20 p)

11. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

12. 0.

13. 90.

14. $\frac{1}{3}$.

15. $\sqrt{2}$.

16. -1.

Subiectul III (20 p)

a) $\det(A) = -1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Din $A^2 = I_2$, rezultă că matricea A este inversabilă şi $A^{-1} = A$.

d) $U \cdot V \cdot A = U \cdot A \cdot V = A \cdot U \cdot V$, deci $U \cdot V \in C(A)$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in C(A)$. Atunci $XA = AX$ sau $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$, de unde $a = d$ și $b = c$. Deci $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

f) Arătăm că dacă $Z \in C(A)$ și $Z^2 = O_2$, atunci $Z = O_2$. Din $Z \in C(A)$, rezultă $Z=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $Z^2=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, iar din $Z^2 = O_2$ rezultă $a = b = 0$, adică $Z = O_2$.

Fie acum $Y \in C(A)$ astfel încât $Y^{2004} = O_2$.

Notăm $Z = Y^{1002}$ și $Z \in C(A)$, iar $Z^2 = O_2$. De aici rezultă $Z = O_2$, adică $Y^{1002} = O_2$.

Procedând analog, obținem $Y^{501} = O_2$, apoi $Y^{251} = O_2$, $Y^{126} = O_2$, $Y^{63} = O_2$, $Y^{32} = O_2$, $Y^{16} = O_2$, $Y^8 = O_2$, $Y^4 = O_2$, $Y^2 = O_2$ și $Y = O_2$.

Subiectul IV.

a) Evident.

b) $x_n = 2n\pi \to \infty$ și $f(x_n) = 2$, deci $f(x_n) \to 2$, iar $y_n = 2n\pi+\frac{\pi}{2} \to \infty$ și $f(y_n) = 2+\frac{\pi}{2}$, adică $f(y_n) \to 2+\frac{\pi}{2}$. Deci nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Cum $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(\sin x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, rezultă $2-\frac{\pi}{2} \leqslant f(x) \leqslant 2+\frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Deoarece $F' = f \geqslant 2-\frac{\pi}{2} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția F este strict crescătoare.

e) Dacă $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $\arcsin(\sin x) = x$, adică $f(x) = 2 + x$ și atunci $F(x)=\int_0^x (2+t)dt = 2x+\frac{x^2}{2}$.

f) Cum $f(x) \geqslant 2-\frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deducem că $F(x) \geqslant \int_0^x \left(2-\frac{\pi}{2}\right)dt = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)x$, $\forall\, x \geqslant 0$ și de aici rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a IX-a

SE ADRESEAZĂ URMĂTOARELOR TIPURI DE LICEE:

- **liceul teoretic:** specializarea științe sociale
- **liceul tehnologic:** profil tehnic, specializările: pielărie, textile; profil resurse naturale și protecția mediului, toate specializările și profil servicii, toate specializările
- **liceul vocațional:** profil artistic, specializarea arhitectură; profil militar (M.I.) specializarea științe sociale

CONȚINUTURI

Algebra

3. Operații cu numere reale

- forme de scriere a unui număr rațional
- puteri cu exponent întreg
- radicali de ordinul 2 sau 3
- compararea a două numere reale
- priorități în efectuarea unui calcul numeric sau algebric
- rotunjiri, aproximări, trunchieri

4. Rezolvări de ecuații

- ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
- ecuații iraționale simple (cu radicali de ordinul 2 sau 3)
- ecuații reductibile la cele studiate

5. Elemente de logică matematică

- enunț, propoziție, valoare de adevăr
- predicat, cuantificatori
- operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență) corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate)
- tipuri de raționamente logice: reducere la absurd, inducție matematică

6. Funcții

- produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unor grafice de funcții
- funcția: definiție, exemple de corespondențe care nu sunt funcții, modalități de a defini o funcție, egalitatea a două funcții, graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului, lecturi grafice, grafice statistice
- funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$
  - studierea raportului $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$

Scanned with OKEN Scanner

• monotonie; semn
• reprezentarea grafică a funcției
• separarea planului în regiuni

- inecuații de forma $ax + b \leqslant 0$ $(\geqslant, <, >)$

- sisteme de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p, \end{cases}$ a,b,c,m,n,p numere reale

- funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
• monotonia, rata creșterii (descreșterii): studierea raportului

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$$

• reprezentarea grafică a funcției
• semnul funcției
• inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ $(\geqslant, <, >)$
• reprezentarea grafică a unei funcții $f: A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$

- rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$

- sisteme de inecuații de tipul celor studiate
- operații cu funcții: adunarea, înmulțirea, împărțirea, compunerea

Geometrie

7. Paralelism și calcul vectorial în plan

- reper cartezian; coordonate carteziene; distanța dintre două puncte
- vectori, egalitatea a doi vectori
- descompunerea unui vector după direcții date
- operații cu vectori: suma a doi vectori, produsul unui vector cu un număr real
- coordonatele unui vector; coordonatele unei sume vectoriale; coordonatele unui produs dintre un vector și un număr real
- coliniaritatea a doi vectori
- ecuația dreptei determinate de un punct și o dreaptă; ecuația dreptei care trece prin două puncte
- recunoașterea paralelismului sau a concurenței a două drepte

---

Notă. Se marchează cu asterisc (conform ordinului nr.3915 din 31.05.2001): Reper cartezian în spațiu. Vectori în spațiu. Operații cu vectori în spațiu

Scanned with OKEN Scanner

8. Relaţii metrice în plan utilizând elemente de trigonometrie

- rezolvarea triunghiului dreptunghic
- cercul trigonometric; sin, cos, tg, ctg
- reducerea la primul cadran; formule trigonometrice fundamentale: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$
- definirea funcţiilor trigonometrice sin, cos, **tg*, **ctg*; **paritate*, periodicitate; reprezentare grafică (prin puncte)
- rezolvarea unor ecuaţii de forma $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$
- modalităţi de calcul a lungimii unui segment şi a măsurii unui unghi:
  - teorema sinusurilor
  - teorema cosinusului
- rezolvarea triunghiului oarecare; formule pentru aria triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

SE ADRESEAZĂ URMĂTOARELOR SPECIALIZĂRI:

- filiera teoretică: specializarea ştiinţe sociale
- filiera tehnologică, profilul resurse naturale şi protecţia mediului şi profilul servicii
- filiera vocaţională, profilul arte vizuale: specializarea arhitectură, arte ambientale şi design; profilul militar (M.I.) specializarea ştiinţe sociale

Clasa a X-a

Calcul numeric şi elemente de matematici financiare

- Operaţii în $\mathbb{Q}$
- Radicalul dintr-un număr raţional (ordin 2 sau 3)
- Puteri cu exponent raţional
- Aproximări raţionale pentru numere iraţionale
- Calcule cu procente
- Dobânzi; TVA; profit
- Tipuri de probleme (calcularea preţului de cost al unui produs; amortizări de investiţii; tipuri de credite; metode de finanţare; buget personal, buget familial)

Progresii

- Progresii aritmetice
- Progresii geometrice

Funcţii

- Funcţia putere cu exponent raţional pozitiv
- Funcţia $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = 1 / x$ (discuţie asupra monotoniei, interpretarea unor date tehnice)
- Funcţia exponenţială
- Funcţia logaritmică

Lecturi grafice: monotonie, creştere liniară; creştere exponenţială, **convexitate, concavitate, comportament asimptotic*, funcţie inversă.

Calcule cu logaritmi şi puteri cu exponent raţional

Grafuri

- Grafuri arbore
- Distanţă, drumuri, lungimea unui drum
- Problema drumului optim
- Aplicaţii la probleme de transport şi organizare administrativă

Metode de numărare

- Probleme de numărare
- Permutări, aranjamente şi combinări
- Binomul lui Newton

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de probabilități și statistică

• Date statistice. Gruparea datelor statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice: diagrame circulare, diagrame prin benzi, histograme.
• Frecvența
• **Variabile aleatoare*
• Elemente de studiu statistic cantitativ și calitativ: medii, dispersia, abaterea de la medie.
• Evenimente aleatoare egal probabile. Operații cu evenimente.
• Probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile.

Geometrie

• Poziții relative în spațiu:
- drepte și plane în spațiu
- pozițiile relative a două plane în spațiu: plane incidente, paralele, perpendiculare
- pozițiile relative a două drepte în spațiu: drepte oarecare, paralele, perpendiculare
- unghiul a două drepte, unghiul a două plane, unghiul unei drepte cu un plan
• Calculul distanței de la un punct la o dreaptă sau la un plan
• Calculul distanței dintre două drepte paralele sau două plane paralele
• Teorema lui Thales în plan și în spațiu
• Secțiuni plane printr-un corp geometric
• Calcul de arii și volume folosind relații metrice

Clasa a XI-a

Elemente de calcul matriceal și sisteme liniare

• Tabel de tip matriceal. Matrice
• Operații cu matrice: Adunarea a două matrice; Înmulțirea unei matrice cu un număr real; Produsul a două matrice
• Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3. Aplicații: aria unui triunghi; coliniaritatea a trei puncte
• **Inversa unei matrice*; **ecuații matriceale*
• Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar; metode de rezolvare a sistemelor liniare (**rezolvarea matriceală*, metoda lui Cramer, metoda lui Gauss)

Elemente de programare liniară

• Diferite tipuri de ecuații ale dreptei (ecuația dreptei care trece prin două puncte, ecuația dreptei care trece printr-un punct și are direcția dată, ecuația generală carteziană)
• Reprezentarea grafică a unui sistem de ecuații liniare
• Împărțirea planului în regiuni. Reprezentarea grafică a inecuațiilor liniare și a sistemelor de inecuații liniare. Probleme de optimizare

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de analiză matematică[1]

- Limita unui şir. Şiruri convergente; comportarea valorilor unei funcţii cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată
- Limite de funcţii: limita unei funcţii într-un punct; interpretare grafică; operaţii cu limite de funcţii. Calculul limitelor unor funcţii polinomiale, exponenţiale, logaritmice, **sau trigonometrice* şi a unor funcţii obţinute din acestea prin operaţii algebrice sau prin compunere; cazuri exceptate la operaţii cu limite de funcţii
- Asimptotele graficului unei funcţii: orizontale, verticale, oblice
- Continuitatea unei funcţii; definiţie, interpretare grafică; operaţii cu funcţii continue
- Derivata unei funcţii într-un punct; interpretare grafică; funcţia derivată; reguli de derivare; operaţii cu funcţii derivabile
- Aplicaţii ale derivatelor (monotonie, puncte de extrem, regulile lui l'Hospital)
- Reprezentări grafice

Clasa a XII-a

Elemente de algebră

- Numere complexe; operaţii cu numere complexe: adunarea, înmulţirea, împărţirea; conjugatul unui număr complex; rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuaţiilor de gr. II cu coeficienţi reali.
- Polinoame cu coeficienţi reali sau complecşi; operaţii cu polinoame: adunarea, înmulţirea, împărţirea cu rest; **studiul relaţiei de divizibilitate*; teorema lui Bezout; descompunerea unui polinom în factori ireductibili; rădăcini complexe ale polinoamelor;
- Operaţii algebrice. Proprietăţi
- Structuri algebrice: grup, inel, corp.

Exemple: mulţimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \leqslant 3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}[X]$ cu operaţii uzuale

Elemente de analiză matematică

- Primitiva unei funcţii derivate şi derivata unei primitive; primitive uzuale
- Proprietăţi comune ale derivatelor şi primitivelor:

$$(f+g)' = f' + g'; \qquad \int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx;$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'; \qquad \int \lambda f\,dx = \lambda \int f\,dx$$

- Derivarea produsului a două funcţii; integrarea prin părţi
- **Schimbarea de variabilă în calculul primitivelor*
- Integrala unei funcţii continue definite cu formula Leibniz-Newton
- Aplicaţii ale integralelor în probleme practice: calcul de arii, **calcul de volume*

---

[1] În studiul analizei matematice se va avea în vedere introducerea intuitivă a fiecărei noţiuni noi. Toate aplicaţiile vor avea în vedere exemple simple.

Scanned with OKEN Scanner

M2- specializările: ştiinţe sociale, chimie industrială, protecţia mediului, silvic şi prelucrarea lemnului, agricol, veterinar, agromontan, industrie alimentară, turism şi alimentaţie publică, economic, administrativ, poştă, arhitectură, arte ambientale şi design, ştiinţe sociale

I. Statutul disciplinei.

Matematica este disciplină obligatorie de examen – *proba d* şi disciplină la alegere din profilul opus – *proba f.*

II. Competenţe de evaluat

1. Identificarea corectă a unor date matematice şi interpretarea în funcţie de contextul în care au fost definite.

2. Descoperirea (alegerea) algoritmilor optimi care permit prelucrarea datelor matematice.

3. Utilizarea algoritmilor şi a raţionamentelor pentru rezolvarea unor probleme teoretice şi practice.

4. Exprimarea cu ajutorul datelor matematice a unor situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora

5. Interpretarea rezultatelor unor acţiuni concrete exprimabile matematic.

În plus, se vor avea în vedere şi competenţele specifice din programa şcolară.

III. Conţinuturi

Clasa a IX-a

Algebră.

Geometrie.

Clasa a X-a

Calcul numeric şi elemente de matematici financiare.

Progresii.

Funcţii.

Metode de numărare.

Elemente de probabilităţi şi statistică.

Clasa a XI-a

Elemente de calcul matriceal şi sisteme liniare.

Elemente de analiză matematică.

Clasa a XII-a

Elemente de algebră .

Elemente de analiză matematică.

Notă. Conţinuturile programei de bacalaureat sunt incluse în conţinuturile programei şcolare din curriculumul nucleu al profilului. (Nu se cer capitolele marcate cu steluţă în programa şcolară). Toate subiectele vor fi elaborate în concordanţă cu programa şcolară, fără a reflecta în mod special viziunea unui manual anume.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Clasa a IX-a, M_2
Numere reale

Partea întreagă a unui număr a este cel mai mare întreg mai mic decât numărul a și se notează $[a]$. *Partea fracționară* a unui număr a este diferența dintre număr și partea sa întreagă și se notează $\{a\}$. Avem $\{a\} = a - [a]$.

Pentru $x \in \mathbb{R}$, avem: $[x] \leqslant x < [x] + 1$; $\quad x - 1 < [x] \leqslant x$; $\quad 0 \leqslant \{x\} < 1$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Media armonică a numerelor reale pozitive nenule $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

Media geometrică a numerelor reale pozitive $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Inegalitatea mediilor. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}_+^*$; avem

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Modulul (valoarea absolută) a numărului real a, este $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

Ecuații

Ecuația de forma $ax + b = 0$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ are soluția unică $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, are:

- ♦ două soluții reale $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- ♦ o soluție reală $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
- ♦ nici o soluție reală dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;

Descompunerea trinomului $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ în produs
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Relațiile lui Viète. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0, \Delta \geqslant 0)$. Notăm: $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 \cdot x_2$. Atunci $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ și $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Formarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ când se cunosc soluțiile sale
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$. Atunci x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - Sx + P = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de logică matematică

Fie propoziţiile p şi q. Avem următoarele tabele de adevăr pentru ...

negaţie

p	$\neg p$
0	1
1	0

conjuncţie

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

disjuncţie

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

implicaţie

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

echivalenţă

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Legea dublei negaţii: $\neg\neg p \leftrightarrow p$

Legea terţului exclus: propoziţia $p \vee \neg p$ este adevărată.

Metoda reducerii la absurd. Fie p, q propoziţii. Avem $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Mulţimi

Fie A, B mulţimi incluse într-o mulţime *de referinţă* (numită şi *totală*) T.

Complementara mulţimii A este mulţimea notată $\overline{A}$ (sau $C_T A$, sau CA), formată din elementele lui T care nu aparţin lui A. $\overline{A} = \{x \mid x \in T, x \notin A\}$.

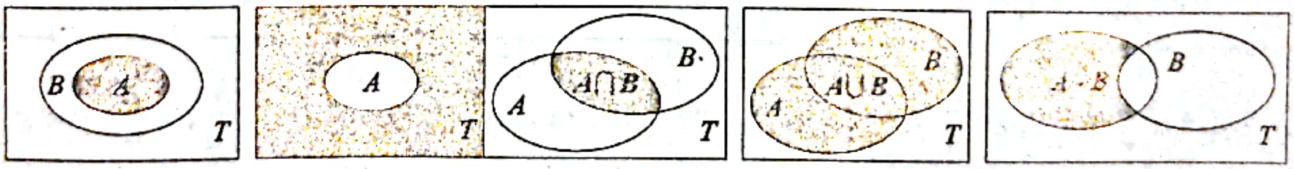
Intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea notată $A \cap B$ formată din elementele lui T care aparţin lui A şi B. $A \cap B = \{x \mid x \in T, x \in A \wedge x \in B\}$.

Reuniunea mulţimilor A şi B este mulţimea notată $A \cup B$ formată cu elementele lui T care aparţin sau lui A, sau lui B. $A \cup B = \{x \mid x \in T, x \in A \vee x \in B\}$.

Notăm cu $|A|$ numărul de elemente ale mulţimii A.

Fie mulţimile A şi B. Atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Diferenţa mulţimilor A şi B este mulţimea notată $A - B$, formată din elementele lui T care aparţin lui A şi nu aparţin lui B. $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.



Numim *produs cartezian al mulţimilor A şi B* mulţimea notată $A \times B$ a perechilor cu primul element din A şi al doilea din B. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ şi } y \in B\}$.

Produsul cartezian a n mulţimi $A_1, A_2, \ldots A_n$ este mulţimea

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\}$.

Principiul inducţiei

Fie propoziţiile $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$. Dacă p_0 este adevărată şi „$\forall k \in \mathbb{N}, p_k \to p_{k+1}$" este adevărată, atunci „$\forall n \in \mathbb{N}, p_n$" este propoziţie adevărată.

Formule care pot fi demonstrate prin inducţie

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcții

Funcția afină

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție afină definită prin relația $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Funcția f este strict crescătoare, dacă $a>0$ și este strict descrescătoare, dacă $a<0$.

Funcția f este constantă, dacă $a=0$.

Dacă $a>0$, atunci $f<0$ pe intervalul $(-\infty,-\frac{b}{a})$ și $f>0$ pe intervalul $(-\frac{b}{a},\infty)$.

Dacă $a<0$, atunci $f>0$ pe intervalul $(-\infty,-\frac{b}{a})$ și $f<0$ pe intervalul $(-\frac{b}{a},\infty)$.

O dreaptă de ecuație $y=ax+b$ separă planul în două semiplane disjuncte:

I. Semiplanul aflat deasupra dreptei d, adică $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y>ax+b\}$;

II. Semiplanul aflat sub dreapta d, adică $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y<ax+b\}$.

Funcția de gradul II

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

semnul lui a	I	semn $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$	monotonia funcției f pe intervalul I	tabelul monotoniei funcției f pe $\mathbb{R}$
$+$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$	$-$	descrescătoare	x | $-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a}\quad$ $+\infty$
$+$	$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	$+$	crescătoare	$f(x)$ | $\searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$
$-$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$	$+$	crescătoare	x | $-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a}\quad$ $+\infty$
$-$	$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	$-$	descrescătoare	$f(x)$ | $\nearrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$

Dacă $a>0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ este minimul funcției. Punctul $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este situat „cel mai jos" pe graficul lui f. Dacă $a<0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ este maximul funcției. Punctul $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este situat „cel mai sus" pe graficul lui f.

Operații cu funcții.

Fie f, g două funcții reale definite pe același domeniu de definiție, D.

$f+g:D\to\mathbb{R}$, $x\xrightarrow{f+g}f(x)+g(x)$ se numește *funcția sumă* a lui f și g;

$f\cdot g:D\to\mathbb{R}$, $x\xrightarrow{f\cdot g}f(x)\cdot g(x)$ se numește *funcția produs* a lui f și g;

$\frac{f}{g}:D\to\mathbb{R}$, cu $g(x)\neq 0$, $\forall x\in D$, $x\xrightarrow{\frac{f}{g}}\frac{f(x)}{g(x)}$ se numește *funcția cât*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g: B \to C$. Funcţia $g \circ f : A \to C$, definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se numeşte *compusa lui f cu g*.

Fie funcţia $f: A \to B, y = f(x)$. Funcţia $g: B \to A$ cu proprietatea $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in A$ şi $(f \circ g)(y) = y, \forall y \in B$, se numeşte *inversa funcţiei f* şi se notează f^{-1}.

Paralelism şi calcul vectorial

Un reper cartezian xOy în plan determină o împărţire a planului în patru *cadrane*:

$I = \{M(x,y) | x > 0, y > 0\}$ $\quad II = \{M(x,y) | x < 0, y > 0\}$

$III = \{M(x,y) | x < 0, y < 0\}$ $\quad IV = \{M(x,y) | x > 0, y < 0\}$.

Distanţa dintre două puncte în plan

Distanţa dintre punctele $M_1(x_1,y_1)$ şi $M_2(x_2,y_2)$ este $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

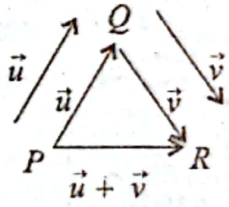
Distanţa dintre două puncte în spaţiu

Într-un reper ortogonal $Oxyz$ distanţa dintre punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ este:

$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Regula triunghiului sau *relaţia lui Chasles*.

Oricare ar fi trei puncte P, Q, R în plan, are loc egalitatea: $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

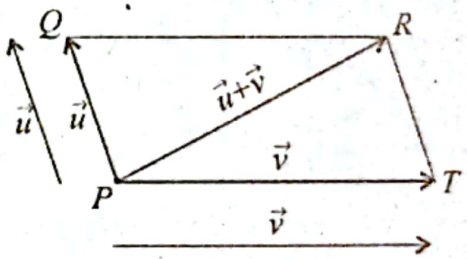


Regula paralelogramului

Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{PQ} = \vec{u}$ şi $\vec{PT} = \vec{v}$.

Construim paralelogramul $PQRT$.

Atunci $\vec{u} + \vec{v} = \vec{PQ} + \vec{PT} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$



Vectori coliniari

Fie $\vec{u}$ un vector nenul şi $\vec{v}$ un vector oarecare.

1) Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, atunci există un număr real λ, unic, astfel încât $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

2) Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, atunci $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v} \in V$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Scalarii α şi β cu această proprietate sunt unici.

Ecuaţia unei drepte în plan

Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(x_M, y_M)$ şi are vectorul director $\vec{u}(\alpha, \beta)$ este:

$y - y_M = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_M)$.

Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ este: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$.

Dreptele distincte $y = mx + n$ şi $y = m'x + n'$ sunt paralele dacă şi numai dacă $m = m'$ şi sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $mm' = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de trigonometrie.

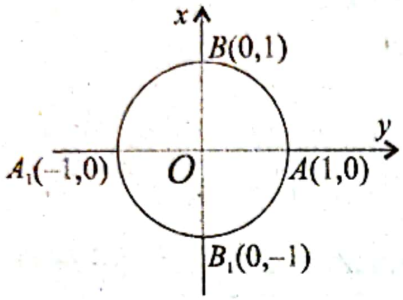
Relația între măsura în radiani, t și măsura în grade a unghiurilor, α, este $\frac{t}{\pi}=\frac{\alpha}{180}$.

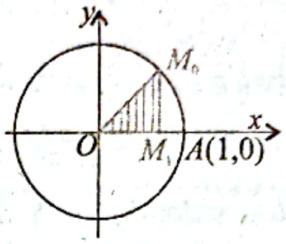
Într-un cerc de rază R, fie t măsura în radiani a arcului de cerc AB și l lungimea arcului de cerc AB. Atunci $l = t \cdot R$.

Într-un cerc trigonometric $\mathscr{C}$ de centru O, fie $A(1, 0) \in \mathscr{C}$. Unui număr real t i se asociază un punct $M(\cos t, \sin t) \in \mathscr{C}$, care are măsura arcului orientat $\widehat{AM}$ egală cu t.

Avem: $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ $\quad -1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

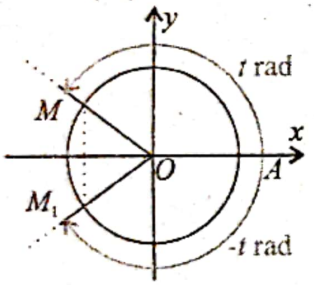
$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (*identitatea fundamentală a trigonometriei*)

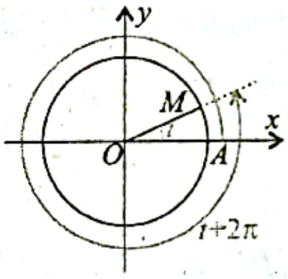


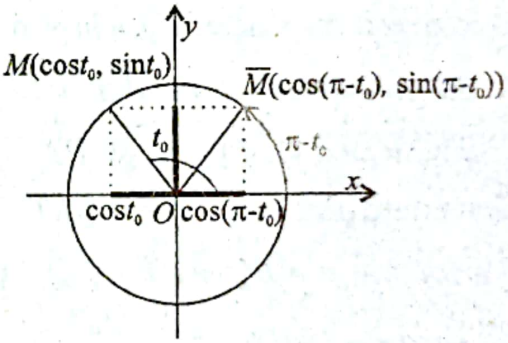


$\sin(-t) = -\sin t$ $\quad \cos(t + 2k\pi) = \cos t$, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$. $\quad \cos t_0 = -\cos(\pi - t_0)$

$\cos(-t) = \cos t$ $\quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t$, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$. $\quad \sin t_0 = \sin(\pi - t_0)$







Pentru $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$.

$\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$

Formule trigonometrice

$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$ $\quad \sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$; $\quad \sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$; $\quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$; $\quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

♦ Funcțiile sinus și cosinus sunt periodice cu perioada principală $T = 2\pi$.

Tangenta este o funcție periodică cu perioada principală $T = \pi$.

Ecuații trigonometrice

Ecuația $\sin t = a$ are soluții dacă $a \in [-1, 1]$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{\arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația $\cos t = a$ are soluții dacă și numai dacă $a \in [-1, 1]$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{\arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Ecuația $\operatorname{tg} t = m$ are soluții, oricare ar fi m un număr real. Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{\operatorname{arctg} m + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Relații metrice în plan și în spațiu

Fie ΔABC cu laturile a, b, c și h_a înălțimea coborâtă din vârful A pe latura opusă a.

Teorema sinusurilor. Fie R raza cercului circumscris ΔABC: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Teorema cosinusului. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Formula lui Heron. Notăm $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Aria ΔABC este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Aria ΔABC este $S = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{ab \cdot \sin C}{2} = \dfrac{abc}{4R} = rp$, unde r este raza cercului înscris.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a, M_2

Calcul numeric și elemente de matematici financiare

Puteri cu exponent rațional.

Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Avem: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; $(a^r)^s = a^{rs}$; $a^0 = 1$; $1^r = 1$;

$(a \cdot b)^r = a^r b^r$; $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; $\forall a > 1,\ a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$; $\forall a < 1,\ a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$.

Dacă $p\%$, $p \neq 0$, dintr-un număr x este b $\left(\text{adică } \frac{p}{100} \cdot x = b\right)$ atunci $x = \frac{100 \cdot b}{p}$.

Dobânda simplă (*nominală*) este dobânda calculată asupra sumei depuse (deci fixe) pe toată perioada depunerii (se notează cu D).

Procentul (*procentul dobânzii*) este dobânda care se plătește pentru suma de 100 lei (100 unități monetare) pe timp de un an.

Dobândă unitară este dobânda calculată pentru suma de 1 leu (o unitate monetară) pe timp de un an și este egală cu a suta parte din procent (se notează cu i).

Dacă notăm, ...

S_0 = suma depusă sau împrumutată inițial pentru care se calculează dobânda

t = durata pentru care se calculează dobânda (exprimată în ani)

p = procentul

S (sau S_t) = suma ridicată după t ani

... atunci avem:

dobânda unitară: $i = \frac{p}{100}$

dobânda simplă: $D = S_t - S_0$

dobânda produsă de S_0 pe t ani:

$D = itS_0 = \frac{S_0 pt}{100}$

O sumă este plasată cu dobândă compusă dacă, la sfârșitul perioadei, se adaugă dobânda simplă a acestei perioade la suma respectivă pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare și așa mai departe.

O sumă S_0, depusă cu un procent de dobândă p, produce într-un an o dobândă $D = \frac{S_0 p}{100}$.

În al doilea an, suma înscrisă în cont va fi $S_1 = S_0 + S_0 \frac{p}{100} = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 u$,

unde $u = 1 + \frac{p}{100}$ (*factor de fructificare*) sau $u = 1 + i$ (i fiind dobânda unitară).

Actualizarea este operația inversă fructificării. *Factorul de actualizare* este $v = (1 + i)^{-1}$.

Taxa pe valoarea adăugată se calculează prin aplicarea cotei de impozitare (în România de 19%) asupra prețului de vânzare din stadiul respectiv, obținându-se în acest fel taxa asupra prețului de vânzare din care se deduce taxa aferentă prețului de vânzare din stadiul anterior pentru a evita impunerea repetată a aceleiași valori.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea profitului, variabilă în timp și spațiu, este pusă în evidență cu ajutorul indicatorilor:

♦ *masa profitului*: se definește ca diferența între venituri și cheltuieli;

♦ *rata profitului*: se calculează fie ca raport procentual între masa profitului P și volumul capitalului C folosit, fie ca raport procentual între masa profitului P și cifra de afaceri CA sau ca raport procentual între masa profitului P și costul total CT (acesta reprezentând de fapt rata rentabilității):

Rata profitului $R_p = \frac{P}{C} \cdot 100$ sau $R_p = \frac{P}{CA} \cdot 100$;

Rata rentabilității $R_p = \frac{P}{CT}$ (se mai notează cu R_r).

Progresii

Progresii aritmetice

Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește progresie aritmetică de rație r și se notează $\div(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$

Fie $\div(a_n)$ de rație r. Avem:

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$

$a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall n \geq 1$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}$

Progresii geometrice

Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numește progresie geometrică de rație $q \neq 0$ și se notează $\div\div(b_n)_{n\geq 1}$ dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall n \geq 1$

Fie $\div\div(b_n)$ de rație q. Avem:

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} nb_1, & \text{dacă } q = 1 \\ b_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, & \text{dacă } q \neq 1 \end{cases}$

Funcții

Fie mulțimile reale A și B și o funcție $f: A \to B$.

♦ f se numește *crescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$.

♦ f se numește *strict crescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$.

♦ f se numește *descrescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$.

♦ f se numește *strict descrescătoare* dacă $\forall\ x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) > f(x_2)$.

♦ f este crescătoare dacă și numai dacă, pentru orice $x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$

♦ f este strict crescătoare dacă și numai dacă, $\forall\ x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

♦ f este descrescătoare dacă și numai dacă, $\forall\ x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$

♦ f este strict descrescătoare dacă și numai dacă, $\forall\ x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

♦ O funcție $f: A \to B$ este *injectivă* dacă îndeplinește una dintre condițiile echivalente:

a) $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

b) $\forall y \in B$, există cel mult un element $x \in A$, astfel încât $y = f(x)$.

♦ O funcție $f: A \to B$ se numește *surjectivă* dacă $\forall y \in B, \exists x \in A$ astfel încât $y = f(x)$.

♦ O funcție $f: A \to B$ se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

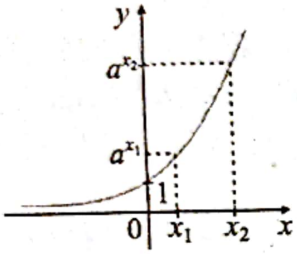
♦ Funcția $f: A \to B$ este *inversabilă* dacă există funcția $g: B \to A$ cu $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

♦ O funcție $f: A \to B$ este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

♦ Dacă $f: A \to B$ este o funcție numerică inversabilă, graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare ($y = x$).

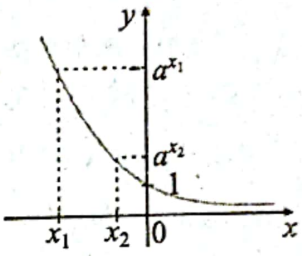
Funcția exponențială este funcția $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$; a se numește bază; a^x se numește putere.

♦ Pentru $a > 1$ graficul funcției exponențiale are forma:



♦ Pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$.

Pentru $0 < a < 1$ graficul funcției exponențiale are forma:



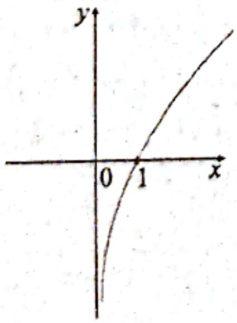
♦ Pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.

♦ Graficul funcției exponențiale trece prin punctul (0, 1), adică $a^0 = 1$, $\forall a > 0, a \neq 1$.

♦ Funcția exponențială este bijectivă, deci e inversabilă. Inversa ei este ...

Funcția logaritmică: $x \mapsto \log_a x$, $x \in (0, \infty)$, a se numește bază. $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

♦ Pentru $a > 1$ graficul funcției logaritmice are forma:



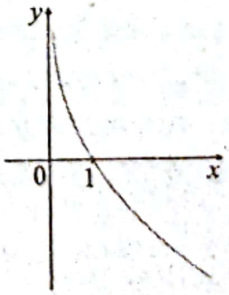
Funcția logaritmică este strict crescătoare:

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	|	−	0	+	

;

Pentru $0 < a < 1$ graficul funcției logaritmice are forma:



Funcția logaritmică este strict descrescătoare:

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	|	+	0	−	

Scanned with OKEN Scanner

♦ Graficul funcției logaritmice trece prin punctul $(1, 0)$, adică $\log_a 1 = 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$.

♦ $\log_a x = z \Leftrightarrow x = a^z$ $\forall a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0, \infty)$ și $z \in \mathbb{R}$.

♦ Dacă $a, b \in (0, +\infty) - \{1\}$, $x, y \in (0, +\infty)$ și $z \in \mathbb{R}$, atunci: $a^{\log_a x} = x$; $\log_a a^z = z$;

$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a b^z = z \cdot \log_a b$; $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Elemente de combinatorică

Fie n și p două numere naturale nenule. Numărul de șiruri cu p elemente aparținând unei mulțimi cu n elemente este n^p.

Fie E și F două mulțimi nevide. Dacă Card $E = p$ și Card $F = n$, atunci numărul funcțiilor definite pe E cu valori în mulțimea F este n^p.

♦ Prin convenție, $0! = 1$; ♦ Notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $n \geqslant 1$.

Fie E o mulțime nevidă cu n elemente.

1. Există n^p șiruri cu p elemente din mulțimea E.
2. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte p, $0 \leqslant p \leqslant n$, este A_n^p, unde:

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ sau $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

3. Numărul permutărilor de n elemente este $P_n = n!$
4. Combinări de n elemente luate câte p, $0 \leqslant p \leqslant n$, este $C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

♦ Formula combinărilor complementare: $C_n^p = C_n^{n-p}$

♦ Formula de descompunere a combinărilor: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Binomul lui Newton

Fie numerele reale a și b și numărul natural nenul n. Avem:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Termenul de rang k din binomiul lui Newton este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$

(Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n);

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$; $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$

Inegalitatea lui Bernoulli, $b^n > 1 + n(b-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Statistică și probabilități

Considerăm un lot de numere $x_1, x_2, ..., x_n$.

Media acestui lot este $M = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Dispersia lotului este $D = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + ... + (x_n - M)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}$.

Proprietăți ale probabilității

Fie U o mulțime (numită univers) și $\mathscr{E}$ părțile mulțimii U. Elementele lui $\mathscr{E}$ se numesc evenimente. Fie P o funcție definită pe $\mathscr{E}$ cu valori în $[0, 1]$. Tripletul $(U, \mathscr{E}, P)$ este un câmp de probabilitate dacă, $\forall A, B$ evenimente din $\mathscr{E}$, avem:

1) $P(\varnothing) = 0$;

2) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

4) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Fie $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un univers finit și P o probabilitate pe $\mathscr{E} = \mathscr{P}(U)$.

Notăm $P_i = P(\{x_i\})$, $i = 1, 2, ..., n$. Atunci:

1) Suma probabilităților evenimentelor elementare este:

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = 1 = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) = \sum_{x=U} P(\{x\}).$$

2) Probabilitatea oricărui eveniment este suma probabilităților evenimentelor elementare pe care le include, adică $P(A) = \sum_{x \in A}(P\{x\})$, $A \subset U$.

Într-un câmp de evenimente egal probabile (U, P), $\forall A \in \mathscr{E}$ avem $P(A) = \frac{[A]}{[U]}$

$$P(A) = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile evenimentului}}{\text{nr. total de cazuri}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a, M_2
Elemente de algebră liniară

Transpusa unei matrice $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ cu m linii și n coloane este o matrice notată ${}^tA=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ cu n linii și m coloane, unde $b_{ij}=a_{ji}$, $\forall i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$

Determinantul matricei de ordin 2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, este $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Determinantul matricei de ordin 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ este numărul

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Regula minorilor. (Dezvoltarea determinantului după o linie sau coloană).

Alegem o linie sau o coloană și înmulțim fiecare element a_{ij} al acestei linii sau coloane cu determinantul de ordin inferior obținut prin eliminarea liniei i și a coloanei j și cu $(-1)^{i+j}$; adunăm produsele astfel obținute și obținem valoarea determinantului.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\ldots$$

Proprietățile determinanților

I. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.

II. O matrice care are o linie (sau o coloană) cu toate elementele 0, are determinantul 0.

III. Dacă înmulțim toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice cu un număr, valoarea determinantului matricei se înmulțește cu acel număr.

IV. Dacă într-o matrice adunăm toate elementele unei linii (respectiv coloane) cu elementele corespunzătoare unei alte linii (respectiv coloane) înmulțite cu un număr, valoarea determinantului nu se schimbă.

V. Dacă o matrice are două linii (respectiv coloane) proporționale, atunci determinantul este nul.

VI. Dacă schimbăm între ele două linii (sau două coloane) dintr-o matrice pătratice, atunci valoarea determinantului se înmulțește cu -1.

Scanned with OKEN Scanner

VII. Dacă matricele A și B diferă printr-o singură linie i, atunci determinantul matricei care are pe linia i suma celor două linii i din matricele A și B este egal cu suma $\det A + \det B$. Avem un enunț similar pentru coloane.

VIII. Determinantul produsului a două matrice pătratice de același ordin este egal cu produsul determinanților acestor matrice.

IX. Dacă o linie (respectiv coloană) a determinantului unei matrice este o combinație liniară a celorlalte linii (respectiv coloane) ale aceluiași determinant, atunci determinantul este nul.

Valoarea Δ a determinantului matricei asociate unui sistem determină compatibilitatea sistemului (existența soluțiilor): dacă $\Delta \neq 0$, sistemul este *compatibil determinat* (are o soluție unică); dacă $\Delta = 0$, atunci sistemul poate fi *incompatibil* (nu are soluții) sau *compatibil nedeterminat* (are o infinitate de soluții).

Metoda lui Cramer.

Fie $\mathcal{S}$ un sistem liniar cu necunoscutele x_i și Δ determinantul său. Presupunem $\Delta \neq 0$. Notăm cu Δ_{x_i} determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei x_i cu coloana termenilor liberi.

Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$ și $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$.

Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ și $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$.

Soluția sistemului $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$ este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, $x_4 = \dfrac{\Delta_{x_4}}{\Delta}$.

Un sistem liniar omogen are toți determinanții Δ_{x_i} nuli; deci admite întotdeauna cel puțin soluția nulă $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Acest sistem admite și soluții nenule dacă $\Delta = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Șiruri de numere reale

Fie un șir numeric $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *majorat*, sau *mărginit superior*, dacă există un număr a cu $u_n \leqslant a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *minorat*, sau *mărginit inferior*, dacă există un număr b cu $u_n \geqslant b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește *mărginit* dacă există un număr M, M > 0, cu $|u_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirurile care nu sunt mărginite se numesc *nemărginite*.

Spunem că șirul $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *tinde la* l (sau $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *converge la* l) și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ (sau $\lim a_n = l$ sau $a_n \to l$), dacă este adevărată oricare dintre următoarele propoziții:

1) Orice vecinătate a lui l conține toți termenii șirului exceptând eventual un număr finit;

2) $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_V \Rightarrow a_n \in V)$;

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)$.

Spunem că șirul $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *tinde* la ∞ și scriem $\lim a_n = \infty$, dacă este adevărată oricare dintre următoarele propoziții echivalente:

1) Orice vecinătate a lui ∞ conține toți termenii șirului, exceptând eventual un număr finit;

2) $\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_V \Rightarrow a_n \in V)$;

3) $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n > n_M \Rightarrow a_n > M)$.

Faptul că șirul $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *tinde* la ∞ se mai notează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \to \infty$ sau $a_n \xrightarrow{n} \infty$.

Se numește *șir convergent* un șir care are limita finită.

Șirurile care nu sunt convergente se numesc *divergente*.

Un șir convergent este mărginit.

Criteriul cleștelui. Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(x_n)_n$ șiruri de numere reale. Dacă $(x_n)_n$ este majorat de $(b_n)_n$ și minorat de $(a_n)_n$ și dacă

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Operații cu șiruri

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri cu limită (finită sau infinită).

♦ *Limita sumei este egală cu suma limitelor*: dacă suma limitelor are sens, atunci $(a_n + b_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Caz exceptat*: $\infty - \infty$.

♦ *Constanta iese în fața limitei*: dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

♦ *Limita produsului este egală cu produsul limitelor*: dacă produsul limitelor are sens, atunci $(a_n b_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Caz exceptat*: $0 \cdot \infty$.

♦ *Limita câtului este egală cu câtul limitelor*: dacă șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are sens și dacă raportul limitelor are sens, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$. *Cazuri exceptate*: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{\infty}$; $\frac{\infty}{-\infty}$

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

♦ Fie $(x_n)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ și $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \begin{cases} a^x, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \\ \infty, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a > 1 \text{ sau dacă } x = -\infty \text{ și } a \in (0, 1). \\ 0, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a \in (0, 1) \text{ sau dacă } x = -\infty \text{ și } a > 1 \end{cases}$$

♦ Dacă $(x_n)_n$ este un șir de numere strict pozitive cu limita x și $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \begin{cases} \log_a x, \text{ dacă } x \in (0, \infty) \\ \infty, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a > 1 \text{ sau dacă } x = 0 \text{ și } a \in (0, 1) \\ -\infty, \text{ dacă } x = \infty \text{ și } a \in (0, 1) \text{ sau dacă } x = 0 \text{ și } a > 1 \end{cases}.$$

Criteriul raportului. Fie $(a_n)_n$ șir de numere strict pozitive. Presupunem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 2) Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Limite importante.

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0\right) = \begin{cases} \infty, a_k > 0 \\ -\infty, a_k < 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & -1 < a < 1 \\ \text{nu există}, & a \leqslant -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l}, & k = l \\ 0, & k < l \\ \infty \cdot \frac{a_k}{b_l}, & k > l \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } \alpha > 0 \\ 1, \text{ dacă } \alpha = 0 \\ 0, \text{ dacă } \alpha < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a, a > 0, a \neq 1;$

$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$ este convergent. Limita sa, notată cu e, aparține intervalului $(2, 3)$.

Dacă $(a_n)_n$ este un șir cu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Dacă $(a_n)_n$ este un șir nenul cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Dacă $(u_n)_n$ converge la zero, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{u_n} - 1}{u_n} = \ln a$.

Nedeterminări înlăturate: $\frac{0}{0}$ sau $0 \cdot \infty$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Limite de funcții

Limita unei funcții într-un punct

Criterii ε – δ. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$.

În cazul $a \in \mathbb{R}$ și $l = \infty$, funcția *f are limita l în punctul a* dacă:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D \setminus \{a\}, |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

În cazul $a = -\infty$ și $l \in \mathbb{R}$, funcția *f are limita l în punctul a* dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in D \setminus \{a\}, x < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.

În cazul $a \in \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$, funcția *f are limita l în punctul a* dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \setminus \{a\}, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.

Teorema Heine. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, dacă și numai dacă oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $D \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, există $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $a \in D' \cap \mathbb{R}$ un punct de acumulare bilateral. Funcția f are limită în a dacă și numai dacă f are limită la dreapta și la stânga în a și aceste limite sunt egale.

Operații cu limite de funcții

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

♦ Cu excepția cazului $\{l_1, l_2\} = \{-\infty, \infty\}$ (cazul $\infty - \infty$), funcția $f+g$ are limită în punctul a și $\lim\limits_{x \to a}(f+g)(x) = \begin{cases} l_1 + l_2, & \text{dacă } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = \infty \text{ sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 \in \mathbb{R} \\ -\infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = -\infty \text{ sau } l_1 = -\infty \text{ și } l_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

♦ Cu excepția cazului $\{l_1, l_2\} = \{0, \infty\}$ sau $\{l_1, l_2\} = \{0, -\infty\}$ (cazul $0 \cdot \infty$), funcția $f \cdot g$ are limită în punctul a și

$$\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \begin{cases} l_1 \cdot l_2, & \text{dacă } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = \infty \text{ sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 > 0 \text{ sau} \\ & \quad l_1 = -\infty \text{ și } l_2 < 0 \text{ sau } l_1 = l_2 = -\infty \\ -\infty, & \text{dacă } l_1 = \infty \text{ și } l_2 = -\infty \text{ sau } l_1 = -\infty \text{ și } l_2 > 0 \\ & \quad \text{sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 < 0 \end{cases}$$

♦ Fie $g: D \to \mathbb{R}^*$, $a \in D'$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Avem $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{dacă } l \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{dacă } l \in \{\pm\infty\}. \\ \infty, & \text{dacă } l = 0_+ \\ -\infty, & \text{dacă } l = 0_- \end{cases}$

Dacă $l = 0$ și $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists x_1, x_2 \in V \cap D \setminus \{a\}$ cu $g(x_1) > 0$ și $g(x_2) < 0$, atunci $\frac{1}{g}$ nu are limită în a.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Metode de eliminare a nedeterminării

Limitele funcțiilor polinomiale

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$, $a_n\neq 0$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^n\left(a_n+a_{n-1}\dfrac{1}{x}+\ \ldots\ +a_0\dfrac{1}{x^n}\right)=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } a_n>0\\ -\infty, & \text{dacă } a_n<0\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } n \text{ par și } a_n>0 \text{ sau } n \text{ impar și } a_n<0\\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ impar și } a_n>0 \text{ sau } n \text{ par și } a_n<0\end{cases}$.

Limitele funcțiilor raționale

Fie $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_1(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, $a_n\neq 0$ și $f_2(x)=b_mx^m+\ \ldots+b_0$, $b_m\neq 0$.

Funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f=\dfrac{f_1}{f_2}$, unde $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f_2(x)\neq 0\}$ se numește *funcție rațională*.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\searrow 0} y^{m-n}\dfrac{a_n+a_{n-1}y+\ \ldots\ +a_0y^n}{b_m+b_{m-1}y+\ \ldots\ +b_0y^m}=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } n>m \text{ și } a_n\cdot b_m>0\\ -\infty, & \text{dacă } n>m \text{ și } a_n\cdot b_m<0\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n=m\\ 0, & \text{dacă } n<m\end{cases}$.

Asemănător se procedează pentru $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Limita funcțiilor de forma $f(x)^{g(x)}$

Fie $f:D\to(0,+\infty)$, $g:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$.

Dacă $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)\doteq b$ și $\exists V\in\mathcal{V}(a)$ cu $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, $g(x)\ln f(x)\neq b$, atunci

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\begin{cases}e^b, & \text{dacă } b\in\mathbb{R}\\ \infty, & \text{dacă } b=\infty\\ 0, & \text{dacă } b=-\infty\end{cases}.$$

Limite remarcabile. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$

Criteriul majorării. Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$.

i) Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\exists l\in\mathbb{R}$, $\exists\, V\in\mathcal{V}(a)$ cu $|f(x)-l|\leqslant g(x)$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ și $\exists\, V\in\mathcal{V}(a)$, cu $f(x)\leqslant g(x)$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

iii) Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ și $\exists\, V\in \mathcal{V}(a)$ cu $f(x)\leqslant g(x)$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Criteriul „cleștelui"

Fie $f, g, h: D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$ și $V\in\mathcal{V}(a)$.

Dacă $\begin{cases} f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),\ \forall x\in V\cap D\setminus\{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l\in\overline{\mathbb{R}} \end{cases}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)=l$.

Fie $f, g: D\to\mathbb{R}$, $a\in D'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ și $\exists\, M>0, \exists\, V\in\mathcal{V}(a)$ cu $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in V\cap D\setminus\{a\}$ (adică f este mărginită pe o vecinătate a lui a), atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$

Funcții continue

Funcția $f: E\to\mathbb{R}$ cu $x_0\in E\cap E'\subset\mathbb{R}$, este continuă în x_0 dacă oricare dintre următoarele propoziții este adevărată:

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

2) $\forall$ șirul $(x_n)_{\mathbb{N}}$ din E, $x_n\overset{n}{\to}x_0 \Rightarrow f(x_n)\overset{n}{\to}f(x_0)$;

3) $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta_\varepsilon>0, \forall x\in E, |x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Funcțiile elementare (polinomiale, putere, trigonometrice și exponențiale) sunt funcții continue pe întreg domeniul lor de definiție.

Dacă funcțiile $f, g: E\to\mathbb{R}$ $(E\subset\mathbb{R})$ sunt continue în punctul $x_0\in E$, atunci funcțiile $af+bg$ (cu $a, b\in\mathbb{R}$) și $f\cdot g$ sunt continue în x_0. Dacă, în plus, $g(x_0)\neq 0$, atunci există $V\in\mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $g(x)\neq 0$, $\forall x\in V\cap E$ și $\dfrac{f}{g}$ este continuă în x_0.

Fie $f: E_1\to E_2$ și $g: E_2\to\mathbb{R}$ $(E_1, E_2\subset\mathbb{R})$ și $h=g\circ f: E_1\to\mathbb{R}$ funcția compusă. Dacă f este continuă în $x_0\in E_1$ și g este continuă în $f(x_0)\in E_2$, atunci h este continuă în x_0.

Scanned with OKEN Scanner

Funcții derivabile

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$; atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$

2) $\forall (x_n)_n \subset D \setminus \{x_0\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$

Dacă $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ spunem că *funcția f este derivabilă în* x_0 și $f'(x_0)$ este derivata sa în x_0.
Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci f este continuă în x_0.

Derivate laterale

O funcție $f: D \to \mathbb{R}$ *are derivată la stânga în* x_0, punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$ dacă există $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_s(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

O funcție $f: D \to \mathbb{R}$ *are derivată la dreapta în* x_0, punct de acumulare al mulțimii $D \cap (x_0, \infty)$ dacă există $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in I$ un punct interior al lui I. Atunci f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0. În acest caz, $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Operații cu funcții derivabile

Fie funcțiile $f, g: D \to \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in D \cap D'$.

- Funcția $f+g$ este derivabilă în x_0 și $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- Funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 și $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.
- Funcția $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
- Dacă $g(x_0) \neq 0$, funcția $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
- Se consideră funcțiile $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$, $y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$. Dacă f este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în y_0, atunci funcția $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Consecințe. Dacă f și g sunt derivabile pe D și $c \in \mathbb{R}$, atunci:

- $f+g$ este derivabilă pe D și $(f+g)' = f' + g'$;
- $c \cdot f$ este derivabilă pe D și $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;
- $f \cdot g$ este derivabilă pe D și $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
- dacă $g(x) \neq 0, \forall x \in D$, $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă pe D și $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- dacă $f: D \to E$ și $g: E \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcția compusă $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă și $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \forall x \in D$.

Scanned with OKEN Scanner

Formule de derivare a funcțiilor compuse.

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', n \in \mathbb{N}^*$; $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \alpha \in \mathbb{R}^*$;

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0, a \neq 0$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$;

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u', \cos u \neq 0$; $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u', \sin u \neq 0$;

$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u^2 < 1$; $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u^2 < 1$;

$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$; $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție; $x_0 \in D$ se numește *punct de minim absolut* (*global*) al funcției f dacă: $f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in D$. $x_0 \in D$ se numește *punct de maxim absolut* (sau *global*) al funcției f dacă: $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in D$.

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in I$.

x_0 se numește *punct de maxim relativ* (sau *local*) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in V \cap I$; $f(x_0)$ se numește maxim relativ al funcției.

x_0 se numește *punct de minim relativ* (sau *local*) al funcției f, dacă există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in V \cap I$; $f(x_0)$ se numește *minim relativ al funcției.*

$x_0 \in I$ este *punct de extrem relativ* (sau *local*) al lui f dacă este punct de minim sau de maxim relativ (sau local).

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă într-un punct de extrem local x_0 din interiorul intervalului I ($x_0 \in I$ și nu este capăt al intervalului); atunci $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică. Dacă graficul funcției admite tangentă într-un punct de extrem ce nu coincide cu extremitățile graficului, atunci tangenta în acest punct este paralelă cu axa Ox.

Teorema lui Rolle. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

1) f este continuă pe $[a, b]$.

2) f este derivabilă pe (a, b)

3) $f(a) = f(b)$.

Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Interpretare geometrică. Fie $A(a, f(a)), B(b, f(b))$; cum $f(a) = f(b)$ rezultă $AB \parallel Ox$. Dacă graficul funcției f admite tangentă în orice punct (cu excepția, eventual, a extremităților A și B) și dreapta ce unește extremitățile A, B este paralelă cu Ox, atunci există cel puțin un punct al graficului în care tangenta este paralelă cu axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Teorema lui Lagrange. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

1) f continuă pe $[a,b]$; 2) f derivabilă pe (a,b).

Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Interpretare geometrică. Dacă graficul lui f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția eventual a extremităților) există cel puțin un punct de pe grafic în care tangenta este paralelă cu coarda [AB] ce unește extremitățile.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange

1) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă și $f'(x)=0$, $\forall x\in I$, atunci f este constantă pe I.

2) Dacă $f,g:I\to\mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I și $f'=g'$, atunci $g-f=$ constant.

3) *Monotonia funcțiilor.* O funcție $f:I\to\mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul I cu $f'>0$ este strict crescătoare, iar dacă $f'<0$ atunci f este strict descrescătoare.

Teorema l'Hospital. Fie $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ și $I\subset\mathbb{R}$ un interval cu $(a,b)\subset I\subset[a,b]$. Dacă $x_0\in[a,b]$ și $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ sunt funcții cu proprietățile:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$);

2) f și g sunt derivabile și $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$;

3) există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$ finită sau infinită;

atunci $g(x)\neq 0,\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ (respectiv $\exists V\in\mathcal{V}(x_0)$, cu $g(x)\neq 0,\forall x\in I\cap V\setminus\{x_0\}$) și există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Asimptote

Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ și $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare al lui D. Dreapta de ecuație $x=x_0$ este *asimptota verticală* la graficul funcției f, dacă cel puțin una dintre limitele laterale: $\lim\limits_{x\nearrow x_0}f(x)$ sau $\lim\limits_{x\searrow x_0}f(x)$ există și este infinită.

Dacă D este o mulțime nemărginită la dreapta (∞ este punct de acumulare pentru D), atunci dreapta $y=mx+n$ este *asimptotă oblică* la $+\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx-n]=0$, $m,n\in\mathbb{R}$ fixate.

Dacă D este o mulțime nemărginită la stânga ($-\infty$ este punct de acumulare pentru D), atunci dreapta de ecuație $y=m'x+n'$ este *asimptotă oblică* la $-\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-m'x-n']=0$, $m',n'\in\mathbb{R}$ fixate.

Dreapta de ecuație $y=mx+n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ a lui f dacă și numai dacă există și sunt finite numerele reale m,n unde $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$.

Dreapta de ecuație $y=m'x+n'$ este asimptotă oblică la $-\infty$ a lui f dacă și numai dacă există și sunt finite m', n' unde $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n'=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-m'x]$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a, M_2

Numere complexe

Un număr complex este de forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $i^2 = -1$; $\text{Re}(z) = a$; $\text{Im}(z) = b$.

Operații cu numere complexe.

Fie $z_1 = a_1 + ib_1$ și $z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$; $\qquad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$; $\qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} - i\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}$.

Numere complexe conjugate

$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$ se numește conjugatul numărului complex $z = a + ib$.

Avem: a) $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $ib = \frac{z - \bar{z}}{2}$; b) $z \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\bar{z} = z$;

c) z este imaginar dacă și numai dacă $\bar{z} = -z$; d) $\overline{\alpha z} = \alpha \cdot \bar{z}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Fie $z = a + ib$ și $z' = a' + ib'$ două numere complexe. Avem:

a) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; b) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$; c) $\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{a'^2 + b'^2}$, $z' \neq 0$.

Polinoame

Forma canonică a polinomului cu coeficienți complecși (respectiv reali) este $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ \ldots\ + a_0$, cu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ (respectiv $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$) și $a_n \neq 0$.

Prescurtat scriem $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Dacă polinomul $f = 0$, spunem că gradul polinomului f este $-\infty$, iar dacă $f = a_n X^n + \ldots + a_0$, cu $a_n \neq 0$ spunem, că polinomul f are grad n.

1) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $z \in \mathbb{C}$. Atunci $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

2) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $b > 0$.

Atunci $f(a \pm \sqrt{b})$ este de forma $A \pm B\sqrt{b}$, $A, B \in \mathbb{Q}$.

Operații cu polinoame

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ și $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, $m < n$.

Suma polinoamelor f și g este polinomul pe care îl notăm $f + g$ definit prin:

$$f + g = g + f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k, \text{ unde } c_k = \begin{cases} a_k + b_k, & k \leq m \\ b_k, & m < k \leq n \end{cases}.$$

Produsul polinoamelor f și g este polinomul $f \cdot g = g \cdot f = c_{n+m}X^{n+m} + \ldots + c_0$, unde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, $k = \overline{0, n+m}$.

Fie f și g polinoame. Atunci $\text{grad}(fg) = \text{grad}f + \text{grad}g$.

Oricare ar fi polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $g \neq 0$, există și sunt unice polinoamele $c, r \in \mathbb{C}[X]$ care au proprietățile: **(1)** $f = g \cdot c + r$; **(2)** grad $r <$ grad g.

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$. *Polinomul f este divizibil prin polinomul g* dacă există un polinom $h \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = gh$. Notăm $f \vdots g$ sau $g \mid f$.

Restul împărțirii unui polinom f prin binomul $X - a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului în a.

Rădăcinile polinoamelor

Teorema lui Bézout. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom nenul și $a \in \mathbb{C}$. Atunci a este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $X - a$ divide f.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $f = 2$, $f = aX^2 + bX + c$. Atunci:

a) f este reductibil peste $\mathbb{C}$

b) f este reductibil peste $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Teorema fundamentală a algebrei (*Teorema D'Alembert-Gauss*). Orice ecuație polinomială de grad mai mare sau egal cu 1 are cel puțin o rădăcină complexă.

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$. Dacă grad $f = n$, atunci f are exact n rădăcini complexe (nu neapărat distincte).

Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, $n \geqslant 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Avem $f = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n)$ și descompunerea lui f în factori de gradul întâi este unică.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom nenul cu coeficienți reali și α o rădăcină a lui f.

1) $\overline{\alpha}$ este de asemenea o rădăcină a lui f.

2) α și $\overline{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate.

Orice polinom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de grad $n \geqslant 1$ cu coeficienți reali poate fi descompus într-un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali.

Legi de compoziție

Tabla operației φ (*Tabla lui Cayley*) pe mulțimea M, este un tabel cu linii și coloane corespunzătoare elementelor mulțimii M. La intersecția liniei a_i cu coloana a_j se află compusul lui a_i cu a_j prin operația φ.

φ	a_1	a_2	$\ldots$	a_j	$\ldots$	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	$\ldots\ldots$			$\varphi(a_i, a_j)$		
$\vdots$						
a_n						

Scanned with OKEN Scanner

• O submulțime nevidă H a lui M se numește *parte stabilă* în raport cu legea de compoziție „$*$" dacă $\forall x, y \in H,\ x * y \in H$.

Proprietăți. *Legea de compoziție* $M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x * y$

♦ este *comutativă* dacă: $x * y = y * x,\ \forall x, y \in M$.

♦ este *asociativă* dacă: $(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall x, y, z \in M$.

♦ admite *element neutru* dacă: $\forall x \in M\ \ e * x = x * e = x$. Elementul neutru, dacă există este unic.

♦ o lege asociativă și cu element neutru are *elemente simetrizabile* dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție „$*$" (asociativă și cu element neutru), atunci $x * y$ și x' sunt simetrizabile. În plus avem:

1) $(x * y)' = y' * x'$; 2) $(x')' = x$.

Grupuri

Un cuplu $(G, *)$, format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție „$*$" pe G, este *grup* dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

G_1) $\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

G_2) $\exists\, e \in G$, astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in G$.

G_3) $\forall x \in G, \exists\, x' \in G$ cu $x' * x = x * x' = e$.

Dacă, în plus, este satisfăcută și axioma G_4. $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, atunci G se numește *grup comutativ* sau *abelian*.

Un cuplu $(M, *)$ format cu o mulțime nevidă M și o lege de compoziție „$*$" pe M, se numește *monoid* dacă:

M_1: $\forall x, y, z \in M, (x * y) * z = x * (y * z)$.

M_2: $\exists\, e \in M$ astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in M$.

Regulile de simplificare într-un grup.

Fie $(G, *)$ un grup. Pentru orice $a, b, c \in G$ avem:

$a * b = a * c \Rightarrow b = c$ și $b * a = c * a \Rightarrow b = c$

Fie $(G, *)$ grup, $a, b \in G$ și a' simetricul lui a. Ecuația $a * x = b$ are în G soluția unică $x = a' * b$ și ecuația $y * a = b$ are în G soluția unică $y = b * a'$.

Scanned with OKEN Scanner

Inele și corpuri

Un triplet $(R, +, \cdot)$, unde R este o mulțime nevidă iar „ + “ și „ $\cdot$ “ sunt două legi de compoziție pe R (numite *adunare* și *înmulțire*), este *inel* dacă:

(G) $(R, +)$ este grup abelian

(M) $(R, \cdot)$ este monoid

(D) înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$\forall\, x, y, z \in R\,,\ x(y+z) = xy + xz\,,\ (y+z)x = yx + zx.$$

Inelul R nu are divizori ai lui zero, dacă $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

Un *inel* R se numește *comutativ* dacă satisface și axioma: (M_3) $xy = yx, \forall\, x, y \in R$.

Un inel R comutativ, cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero, se numește *domeniu de integritate.*

Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ se numește *inelul întregilor lui Gauss.*

Fie $(R, +, \cdot)$ inel. Operația $y - z = y + (-z)$, $y, z \in R$ se numește *diferență.*

Într-un inel $(R, +, \cdot)$ au loc următoarele proprietăți:

1) $\forall\, x \in R, x0 = 0x = 0.$

2) *Într-un inel cu cel puțin două elemente avem $1 \neq 0$.*

3) *Regula semnelor:* $\forall\, x, y \in R,\ (-x)y = x(-y) = -xy$ și $(-x)(-y) = xy$.

4) *Distributivitatea înmulțirii față de scădere*: $\forall\, x, y, z \in R\,,\ x(y-z) = xy - xz$ și $(y-z)x = yx - zx$.

5) Într-un inel R fără divizori ai lui zero putem simplifica cu elemente diferite de 0, adică $\forall\, x, y, z \in R, x \neq 0, xy = xz$ sau $yx = zx \Rightarrow y = z$.

Elementele inversabile ale unui inel R se numesc *unități* ale lui R. Notăm cu $U(R)$ mulțimea unităților inelului R. $U(R)$ este grup în raport cu operația indusă de înmulțirea lui R, numit *grupul unităților* inelului R.

Un inel K se numește *corp* dacă $0 \neq 1$ și orice element nenul din K este simetrizabil în raport cu înmulțirea. Dacă înmulțirea este comutativă, K se numește *corp comutativ.*

Proprietăți

1) *Un corp nu are divizori ai lui zero.*

2) *Elementele nenule ale unui corp formează grup cu înmulțirea.*

3) *Orice domeniu de integritate finit este corp.*

Scanned with OKEN Scanner

Noțiunea de integrală

Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci șirul $\left(S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la un număr, notat $\int_a^b f(x)dx$, pe care-l vom citi *integrala funcției f pe* $[a,b]$.

Considerăm o funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcția definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Atunci F este derivabilă și $F'=f$.

Fie I un interval și funcțiile $f:I\to\mathbb{R}$, $F:I\to\mathbb{R}$. Funcția F se numește *primitivă* a lui f dacă: 1) F este derivabilă 2) $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$.

Spunem că *o funcție f admite primitive pe intervalul I* dacă există o primitivă a funcției f.

Fie I un interval și funcția $f:I\to\mathbb{R}$ care admite primitive. Dacă $F_1, F_2:I\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f, atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x)=F_2(x)+c$, $\forall x\in I$.

Fie un interval I și o funcție $f:I\to\mathbb{R}$ care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f se notează prin $\int f(x)\,dx$ și se numește *integrala nedefinită a funcției f*: $\int f(x)\,dx=\{F:I\to\mathbb{R}\mid F \text{ este primitivă a funcției } f\}$.

Dacă funcția $f:I\to\mathbb{R}$ admite o primitivă F, atunci $\int f(x)\,dx=F+\mathscr{C}$.

Dacă $f, g:I\to\mathbb{R}$ admit primitive și $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, atunci funcțiile $f+g$ și λf admit primitive și, în plus, au loc relațiile: a) $\int f(x)dx=\int f(x)dx+\mathscr{C}$

b) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ c) $\int\lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$.

O funcție continuă pe un interval, admite primitive pe acel interval

Derivata oricărei funcții derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I, atunci funcția f are proprietatea lui Darboux pe I.

Formula de integrare prin părți

Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval și $f, g:I\to\mathbb{R}$ funcții derivabile cu deri-vatele continue. Atunci funcțiile $f'\cdot g$ și $f\cdot g'$ admit primitive și

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Primitive uzuale

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathscr{C}$ $n\in\mathbb{N}$
2. $\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+\mathscr{C}$ $a\neq -1$
3. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+\mathscr{C}$ $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$
4. $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\mathscr{C}$ $a\neq 0$
5. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+\mathscr{C}$
6. $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathscr{C}$ $a\neq 0$
7. $\int\sin x\,dx=-\cos x+\mathscr{C}$
8. $\int\cos x\,dx=\sin x+\mathscr{C}$

Scanned with OKEN Scanner

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathscr{C}$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathscr{C}$

11. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + \mathscr{C}$

12. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + \mathscr{C}$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathscr{C}$, $a \neq 0$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \mathscr{C}$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathscr{C}$ $a > 0$

Integrarea funcțiilor raționale

O funcție rațională simplă are una din formele:

1) $f(x) = P(x)$, $P \in \mathbb{R}[X]$;

2) $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$, $A, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $f(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + ax + b)^n}$, $A, B, a, b \in \mathbb{R}$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

O funcție rațională se descompune, în mod unic, în sumă de funcții raționale simple.

Fie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice polinoamele C, $R \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ și $\operatorname{grad} R < \operatorname{grad} Q$. Pentru a descompune $\frac{R(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple, descompunem polinomul Q în factori ireductibili, care pot fi numai de gradul I (de forma $x - a$) sau de gradul II (de forma $x^2 + ax + b$, cu $a^2 - 4b < 0$): $\frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a}$;

$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$; $\frac{R(x)}{x^2 + ax + b} = \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$..., unde $A, B \in \mathbb{R}$.

- $\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0) dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots + a_0 x + \mathscr{C}$.
- $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathscr{C}$, $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.
- $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + \mathscr{C}$.
- $\int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + ax + b) + \frac{2B - aA}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + a}{\sqrt{|\Delta|}} + \mathscr{C}$.

Integrale definite

Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției continue $f : I \to \mathbb{R}$. *Integrală definită (sau integrală) a funcției f de la a la b* este numărul real:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ (formula Leibniz-Newton).}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăți:

♦ *Proprietatea de liniaritate a integralei:*

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.

♦ *Proprietatea de aditivitate a integralei:* $\forall c \in I, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

♦ *Proprietatea de medie a integralei:* $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.

♦ *Proprietatea de pozitivitate a integralei:* dacă $f \geqslant 0$ pe $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

♦ *Proprietatea de monotonie a integralei:* dacă $f \leqslant g$ pe $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Interpretarea geometrică a integralei definite

Fie numerele reale $a < b$ și funcția continuă pozitivă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Subgraficul* funcției f este $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

Suma Riemann (sau *sumă integrală*) asociată lui f, Δ și ξ este numărul real $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, unde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$ este *sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii* $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b)$.

Aria subgraficului unei funcții continue pozitive $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este: aria $(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Metode de calcul a integralelor definite

Formula de integrare prin părți. Presupunem că funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele $f', g' : I \to \mathbb{R}$ continue. Fie două numere $a, b \in I$. Atunci:

$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$.

Formula de schimbare de variabilă. Presupunem că funcția $\varphi : J \to I$ este derivabilă, cu derivata continuă și funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă. Fie două numere $\alpha, \beta \in J$. Atunci: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$. Se fac schimbările, de variabilă și de simbol, $\varphi(t) = x$ și $\varphi'(t)dt = dx$, $t \in J$ și $x \in I$.

Aplicații ale integralei definite

Aria unei suprafețe mărginită de grafice de funcții

Fie funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue (sau continue pe porțiuni). Presupunem că $g(x) \leqslant f(x), \forall x \in [a, b]$. Suprafața dintre graficele funcțiilor f și g pe $[a, b]$ este $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ și } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Aria suprafeței Γ este $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Volumul unui corp de rotație

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Mulțimea $\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant |f(x)|\right\}$ se numește *corpul de rotație* în jurul axei Ox determinat de funcția f și are volumul $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Modele de teste pentru bacalaureat

M2
Varianta 1

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinoamele $f = X^3 - X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $g = X^3 - X^2 + X - 1$. Notăm cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului g.

(3p) **1.** Cât este a și cât este b, știind că polinomul $X - 1$ divide pe f și că $f(-1) = -4$?

(3p) **2.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3$?

(3p) **3.** Cât este restul împărțirii polinomului g la polinomul $X^2 - X$?

(3p) **4.** Care este numărul de valori reale pe care le poate lua expresia $E = x_1^2 + x_2 + x_3$, când permutăm rădăcinile x_1, x_2 și x_3 în toate modurile posibile?

(3p) **5.** Care este numărul de soluții reale ale ecuației $g(2^x) = 0$?

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^3 - x^3$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) > 0\}$?

(3p) **8.** Cât este suma $f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$?

(3p) **9.** Care este valoarea limitei $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(0) + f(1) + \ldots + f(n)}{n^3}$?

(3p) **10.** Care este aria suprafeței plane, cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Să se treacă în produs suma cos1 – cos3.

(4p) **12.** Care este lungimea segmentului AB, dacă $A(1, 2)$ și $B(2, 1)$?

(3p) **13.** Care este volumul unui cub de latură a?

(3p) **14.** Care este perioada principală a funcției cos?

(3p) **15.** Care este valoarea maximă a expresiei $\sin^2 x + \cos^2 x$ când $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **16.** Care este produsul numerelor $1 + i$ și $2 - 3i$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră mulțimea A a numerelor de 3 cifre distincte, scrise cu cifrele 2, 3, 4, 5.

(4p) a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

(4p) b) Să se determine câte elemente din mulțimea A se divid cu 5.

(3p) c) Se alege la întâmplare un element din mulțimea A. Să se calculeze probabilitatea ca acest element să se dividă cu 5.

(3p) d) Să se determine câte elemente din mulțimea A se divid cu 4.

(3p) e) Să se calculeze cu ce probabilitate, alegând un element din mulțimea A, acesta se divide cu 4.

(3p) f) Să se determine numărul de elemente impare din mulțimea A.

Subiectul IV (20p)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0=\int_0^1 \frac{1}{3x+2}dx$ și $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{3x+2}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se calculeze I_0 și I_1.

(3p) b) Să se arate că $3I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(3p) c) Dacă $x\in[0,1]$, să se arate că $x^n\geqslant x^{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(3p) d) Să se arate că $I_n\geqslant I_{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) e) Să se deducă inegalitățile $\frac{1}{5(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{5n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(3p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 2

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{20} + (X - 1)^{20}$, având forma algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

(3p) **1.** Care este valoarea sumei $a_0 + a_1 + a_2$?

(3p) **2.** Cât este $f(1)$?

(3p) **3.** Cât este $(i + 1)^4$?

(3p) **4.** Cât este $f(i)$?

(3p) **5.** Care este valoarea expresiei $4(a_0 + a_4 + a_8 + \ldots + a_{20}) - (f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)e^x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) > 0\}$?

(3p) **8.** Care este valoarea minimă pe care o ia funcția f?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **10.** Care este asimptota la graficul funcției f către $-\infty$?

a) nu există; b) $y = 0$; c) $y = 1$; d) $y = x$.

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Câte plane diferite trec prin cel puțin câte 3 vârfuri ale unei piramide patrulatere?

(4p) **12.** Care este valoarea expresiei $\sin a + \sin(-a)$?

(4p) **13.** Care este valoarea minimă a expresiei $2\sin x \cos x$, când $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **14.** Care este partea reală a numărului $(1 + i)(1 + 2i)$?

(3p) **15.** Care este aria unui triunghi cu laturile 3, 4 și 5?

(2p) **16.** Care dintre numerele următoare este mai mare: $\sin 10°$ sau $\operatorname{tg} 10°$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, precum și submulțimea $\{G=X(a)\mid a\in\mathbb{R} \text{ și } X(a)=I_2+aA\}$.

(3p) a) Să se verifice că $A^2=3A$.

(3p) b) Să se verifice că $I_2\in G$.

(2p) c) Să se arate că $X(a)X(b)=X(a+b+3ab)$.

(3p) d) Să se arate că $X(a)X\left(-\frac{1}{3}\right)=X\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

(3p) e) Să se arate că, dacă $a\neq-\frac{1}{3}$, atunci $X(a)X\left(\frac{-a}{1+3a}\right)=I_2$.

(3p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că

$$(X(a))^n=X\left(3^n\left(a+\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

(3p) g) Să se determine $t\in\mathbb{R}$, pentru care

$$X\left(-\frac{2003}{3}\right)X\left(-\frac{2002}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X(0)X\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2003}{3}\right)=X(t).$$

Subiectul IV (20p)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, definit prin $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ și $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$.

(6p) a) Să se calculeze I_0 și I_1.

(3p) b) Să se verifice relația $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(3p) c) Să se arate că $I_n\geq I_{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(2p) d) Să se deducă inegalitățile $\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n-1)}$, $\forall n\geq 2$.

(3p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$.

(3p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 3

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Se consideră polinoamele $f = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + 3X + 9$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Care este restul împărțirii polinomului $X^3 - 27$ la polinomul g?

(3p) **2.** Cât este suma $x_1 + x_2 + x_3$?

(3p) **3.** Cât este y_1^3 ?

(3p) **4.** Cât este $f(i)$?

(3p) **5.** Care este valoarea produsului $(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_1)(x_3 - y_2)$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{arctg}x + \text{arcctg}x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $f(0)$?

(3p) **8.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 f(x)\,dx$?

(3p) **10.** Care este asimptota la graficul funcției f către $-\infty$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este valoarea expresiei $\cos a - \cos(-a)$?

(4p) **12.** Care este valoarea maximă a expresiei $\sin^2 x - \cos^2 x$, când $x \in \mathbb{R}$?

(4p) **13.** Cât este $|3+5i| - |3-5i|$?

(4p) **14.** Care este parea imaginară a numărului $(1 + i)(1 + 2i)$?

(2p) **15.** Care este aria unui triunghi cu laturile 6, 8 și 10?

(2p) **16.** Care este suma sinusurilor unghiurilor unui triunghi cu laturile 6, 8 și 10?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze AB și BA.

(4p) b) Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB și BA este aceeași.

(4p) c) Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$.

(4p) d) Să se demonstreze că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\det(A_1A_2...A_n) = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_n)$, $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^8$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^9 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se calculeze $f(-1)$ și $g(-1)$.

(4p) b) Să se verifice că $(x + 1)f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) c) Să se arate că, dacă $x < -1$, atunci $g(x) < 0$ și dacă $x > -1$, atunci $g(x) > 0$.

(4p) d) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notăm cu $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^9}{9}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) e) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

(2p) f) Să se arate că $F(x) > 0$, $\forall x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 4

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Se consideră polinomul $f = (X + i)^5 - (X - i)^5$ cu scrierea algebrică $f = a_4X^4 + ... + a_1X + a_0$ și rădăcinile $x_1, ..., x_4 \in \mathbb{C}$.

(3p) **1.** Cât este a_4?

(3p) **2.** Cât este $f(0)$?

(3p) **3.** Cum sunt rădăcinile ecuației $5x^2 - 10x + 1 = 0$, rezolvată în $\mathbb{C}$?

(3p) **4.** Câte rădăcini reale are polinomul f ?

(3p) **5.** Câte dintre elementele $a_0, a_1, ..., a_4$ sunt numere reale?

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + e^x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Care este asimptota la graficul funcției f către $-\infty$?

(3p) **8.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{f'(x)}$?

(3p) **10.** Câte puncte de extrem local are funcția f ?

Subiectul II (20p)

(5p) **11.** Care este valoarea minimă a funcției $\sin^2 x - \cos^2 x$, când $x \in \mathbb{R}$?

(4p) **12.** Să se treacă în sumă produsul $2\cos x \cos 2x$.

(3p) **13.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 2)$?

(4p) **14.** Care dintre numerele următoare este mai mare: $\cos 10°$ sau $\operatorname{tg} 10°$?

(2p) **15.** Care este aria maximă a unui triunghi cu perimetrul 3?

(2p) **16.** Găsiți un număr complex, care înmulțit cu $1 + i$ să dea un număr real.

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,|\,AX=XA\}$.

(4p) a) Să se verifice că $A\in G$ și $I_2\in G$.

(4p) b) Să se găsească o matrice $T\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T\notin G$.

(4p) c) Să se verifice că $A^2=-I_2$.

(4p) d) Să se arate că $A^2X=XA^2$, $\forall\, X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $a, b\in\mathbb{C}$, atunci matricea $B=aI_2+bA\in G$.

(2p) f) Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci există $a, b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=aI_2+bA$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

(4p) a) Să se determine asimptota verticală a graficului funcției f.

(4p) b) Să se determine asimptota la $+\infty$ a graficului funcției f.

(3p) c) Să se arate că $f(x)-1+x-x^2\leqslant 0$, $\forall\, x\geqslant 0$.

(3p) d) Să se arate că $f(x)-1+x-x^2+x^3\geqslant 0$, $\forall\, x\geqslant 0$.

(4p) e) Să se deducă inegalitățile $1-x+x^2-x^3\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant 1-x+x^2$, $\forall\, x\geqslant 0$.

(2p) f) Să se arate că aria cuprinsă între graficul funcției $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{1+x^9}$, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$, este un număr real cuprins în intervalul $(0{,}91;\ 0{,}96)$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 5

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, ..., 10\}$.

(3p) **1.** Câte submulțimi cu opt elemente are mulțimea A?

(3p) **2.** Câte submulțimi are mulțimea A?

(3p) **3.** În câte submulțimi ale mulțimii A se află elementul 1?

(3p) **4.** Care este numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o submulțime a mulțimii A, cu proprietatea că suma oricăror două elemente distincte ale sale nu se divide cu 3?

(3p) **5.** Care este suma elementelor mulțimii A?

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=x^{10}+x^9+...+x+1$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $\forall n\in\mathbb{N}$.

(3p) **6.** Cât este $f_0(1)$?

(3p) **7.** Cât este $f_1(0)$?

(3p) **8.** Cât este $\int_0^1 f_{2003}(x)\,dx$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(n)$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0(0)+f_1(0)+...+f_n(0)}{n}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este valoarea sumei cos185° + cos5°?

(4p) **12.** Care este aria unui triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 3?

(4p) **13.** Care este raportul dintre aria unui pătrat și pătratul diagonalei?

(4p) **14.** Să se treacă în sumă produsul $2\cos x\sin 2x$.

(2p) **15.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, 5)$ și $B(6, 1)$?

(2p) **16.** Găsiți un număr complex care adunat cu $1 + 2i$ să dea un număr real.

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) b) Să se calculeze matricea A^3.

(4p) c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $A^n = I_2$.

(4p) d) Să se calculeze matricea $I_2 + A + ... + A^5$.

(4p) e) Să se calculeze determinantul matricei $A + A^2 + ... + A^{2003}$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+e^{-x}$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(4p) c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

(4p) d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{f'(x)}$.

(2p) e) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$ și strict descrescătoare pe pe intervalul $(-\infty, 0]$.

(2p) f) Să se arate că ecuația $f(x)+f(21x)=f(2x)+f(1986x)$ are numai soluția $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 6

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$\circ$“ prin $x \circ y = 2xy - 4x - 4y + 10$.

(3p) **1.** Cum mai poate fi scris elementul $x \circ y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$?

(3p) **2.** Pentru ce valori ale lui $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$?

(3p) **3.** Care este elementul neutru al legii „$\circ$“ ?

(3p) **4.** Cum este mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid x \circ 2 = 2\}$?

(3p) **5.** Cât este $(-2003) \circ (-2002) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2002 \circ 2003$?

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-1, -2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

(3p) **6.** Cât este expresia $f(x) - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1, -2\}$?

(3p) **7.** Care este numărul de asimptote verticale la graficul funcției f?

(3p) **8.** Care este aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$?

(3p) **9.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 f(x)$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} (f(0) + f(1) + \ldots + f(n))$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Găsiți un număr complex care înmulțit cu $1 + 2i$ să dea un număr real.

(4p) **12.** Care este aria unui pătrat cu diagonala de $\sqrt{2}$?

(4p) **13.** Care este raportul dintre ipotenuză și raza cercului circumscris într-un triunghi dreptunghic?

(4p) **14.** Dați exemplu de laturi ale unui triunghi care are aria și laturile numere întregi.

(2p) **15.** Cât este $\sin 10° + \sin(-10°)$?

(2p) **16.** Cât este $\cos 10° - \cos(-10°)$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră polinoamele $f=X^2-4X+3$, $g=X^n$, $n\in\mathbb{N}$ și matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se determine rădăcinile polinomului f.

(4p) b) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) c) Să se calculeze A^2.

(4p) d) Să se verifice că $f(A)=O_2$.

(2p) e) Să se arate că restul împărțirii polinomului g la polinomul f este $\frac{3^n-1}{2}X+\frac{3-3^n}{2}$.

(2p) f) Să se arate că $A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=xe^x$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) a) Să se calculeze $f_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se rezolve ecuația $f_2(x)=0$.

(2p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=(x+n)e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(2p) d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) e) Să se determine asimptota la graficul funcției f_0 către $-\infty$.

(4p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 7

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3p) **1.** Cât este determinantul matricei A ?

(3p) **2.** Care este suma elementelor matricei A^3 ?

(3p) **3.** Care este cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $A^n = I_2$?

(3p) **4.** Cât este matricea $I_2 + A + ... + A^5$?

(3p) **5.** Cât este determinantul matricei $A + A^2 + ... + A^{2003}$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)(x^2-4)$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Care este numărul de puncte de inflexiune ale graficului funcției f ?

(3p) **9.** Care este aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox, și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}\int_0^x f(t)\,dt$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este distanța dintre punctele $A(1, 0)$ și $B(2, 5)$?

(4p) **12.** Care este modulul numărului $\dfrac{1+i}{1-i}$?

(4p) **13.** Care este partea reală a numărului $(1 - i)(1 + 2i)$?

(4p) **14.** Care este diagonala unui pătrat de perimetru 4?

(2p) **15.** Care este cea mai mare distanță dintre 2 puncte ale unui triunghi cu laturile 3, 4, 5?

(2p) **16.** Care dintre numerele următoare este mai mare: $\cos\dfrac{\pi}{5}$ sau $\sin\dfrac{\pi}{5}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție „$\circ$“, definită prin $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$.

(4p) a) Să se verifice identitatea $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, $\forall\, x, y \in \mathbb{C}$.

(4p) b) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{C}$.

(4p) c) Să se calculeze $x \circ (-i)$.

(4p) d) Să se calculeze $(-100i) \circ (-99i) \circ \ldots \circ (-i) \circ 0 \circ i \circ 2i \circ \ldots \circ 99i \circ 100i$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1 + i)(x_2 + i)\ldots(x_n + i) - i$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.

(2p) f) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$.

Subiectul IV (20p)

Se considera funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^3 - x^3$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f..

(4p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(4p) d) Să se determine valoarea minimă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(0) + f(1) + \ldots + f(n)}{n^3}$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{xf'(x)}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 8

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Se consideră polinoamele $f=X^2+X+1$ cu rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{C}$ și $g=X^3-1$.

(3p) **1.** Care este restul împărțirii polinomului g la polinomul f?

(3p) **2.** Cât este expresia $x_1^3-x_2^3$?

(3p) **3.** Cât este suma $x_1+x_2+x_1x_2$?

(3p) **4.** Cât este suma $x_1^{2004}+x_2^{2004}$?

(3p) **5.** Cât este suma $1+x_1+x_1^2+\ldots+x_1^{21}$?

Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

(3p) **6.** Cât este expresia $f(x)-2+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$, $x\in[0,\infty)$?

(3p) **7.** Care este asimptota orizontală către $+\infty$, la graficul funcției f?

(3p) **8.** Cât este $f'(x)$, $x\in[0,\infty)$?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este distanța maximă dintre 2 puncte ale unui dreptunghi cu lungimea 4 și lățimea 3?

(4p) **12.** Care este aria unui cerc cu raza 1?

(4p) **13.** Care dintre numerele următoare este mai mare: $\cos\dfrac{\pi}{5}$ sau $\cos\dfrac{3\pi}{5}$?

(4p) **14.** Cât este $a\in\mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}_2=a\vec{i}+6\vec{j}$ să fie perpendiculari?

(2p) **15.** Cât este $a\in\mathbb{R}$, pentru ca dreptele de ecuații $x-y+1=0$ și $2x+ay+10=0$ să fie paralele?

(2p) **16.** Cât este $a\in\mathbb{R}$, pentru ca dreptele de ecuații, $x+y-2=0$ și $2x-ay+1=0$ să fie perpendiculare?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x-1$.

(4p) a) Să se calculeze suma $f(1)+f(2)+\ldots+f(2003)$.

(4p) b) Să se arate că mulțimea $\mathbb{Z}-\{f(x)\,|\,x\in\mathbb{Z}\}$ este infinită.

(4p) c) Să se verifice că dacă $x\neq y\in\mathbb{Z}$, atunci $f(x)\neq f(y)$.

(4p) d) Să se calculeze $(f\circ f)(x)$, $x\in\mathbb{Z}$.

(2p) e) Să se arate că mulțimea $\{h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\,|\,(h\circ f)(x)=x,\forall x\in\mathbb{Z}\}$ este infinită.

(2p) f) Să se arate că mulțimea $\{g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\,|\,(f\circ g)(x)=x,\forall x\in\mathbb{Z}\}$ este vidă.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=x^{100}+x^{99}+\ldots+x+1$ și $f_{n+1}(x):=f_n'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $\forall n\in\mathbb{N}$.

(4p) a) Să se calculeze $f_0(1)$.

(4p) b) Să se calculeze $f_1(0)$.

(4p) c) Să se arate că $f_n(x)=0$, $\forall\, n\geq 101$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

(4p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f_{2003}(x)dx$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(n)$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)}{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 9

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte submulțimi de 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 10\}$, au elementele în progresie geometrică?

(3p) **2.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$, să fie pătrat perfect?

(3p) **3.** Cât este C_5^3?

(3p) **4.** Care este suma primelor 2 zecimale ale numărului $5\sqrt{2}$?

(3p) **5.** Cât este suma $1+5+9+...+49$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **10.** Cum este funcția f pe intervalul $(0, \infty)$: strict crescătoare sau strict descrescătoare ?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Care este distanța dintre punctele $A(1, 1)$ și $B(4, 5)$?

(4p) **12.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca dreptele de ecuații $x + y + 1 = 0$ și $3x + ay + 5 = 0$ să fie paralele?

(2p) **13.** Cât este $\cos\dfrac{5\pi}{4}$?

(2p) **14.** Care este conjugatul numărului complex $z = -1$?

4p) **15.** Care este aria triunghiului ABC, dacă $AB = 5$, $AC = 6$ și $\sin(\hat{A})=\dfrac{1}{2}$?

(4p) **16.** Cum se numește punctul situat la intersecția bisectoarelor interioare unui triunghi?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră mulțimea
$A=\{x\in\mathbb{R}\mid \text{există } a,b\in\mathbb{Z} \text{ astfel încât } x^2+ax+b=0\}$.

(4p) a) Să se verifice că dacă $p\in\mathbb{Z}$, atunci $p\in A$.

(4p) b) Să se arate că $1-\sqrt{2}\in A$.

(2p) c) Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$.

(4p) d) Să se arate că, dacă $r\in\mathbb{Q}\cap A$, atunci $r\in\mathbb{Z}$.

(4p) e) Să se arate că dacă $n\in\mathbb{N}$ și $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{n}+k\in A$.

(2p) f) Să se demonstreze că $A\cap\left(0,\frac{1}{2}\right)\neq\varnothing$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

(4p) a) Să se verifice că $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(2p) d) Să se arate că dreapta $y = x$ este asimptota oblică către $+\infty$ la graficul funcției f.

(4p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

(2p) f) Să se rezolve ecuația $f(11x)+f(1984x)=f(21x)+f(2004x)$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 10

SUBIECTUL I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte submulțimi de două elemente, fiecare submulțime având suma elementelor număr impar, are mulțimea $\{1, 2, ..., 6\}$?

(3p) **2.** Cât este C_6^2?

(3p) **3.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$, să fie număr prim?

(3p) **4.** Cât este produsul primelor două zecimale ale numărului $2\sqrt{3}$?

(3p) **5.** Cât este suma $3 + 6 + 9 + ... + 30$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3p) **8.** Cât este $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{\int\limits_0^x f(t)dt}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Cât este $\cos\dfrac{\pi}{3}$?

(4p) **12.** Cât este $\sin\pi$?

(4p) **13.** Care este modulul numărului complex $z = 1 + i$?

(4p) **14.** Cât este $i \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^{2005}$?

(2p) **15.** Care este aria totală a unui cub de latură 1?

(2p) **16.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1, 5)$ și $B(3, 3)$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

Se consideră mulțimea $G=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(x)=ax+1-a,\ a\in\mathbb{R}^*,\forall x\in\mathbb{R}\}$ și funcția $1_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) a) Să se arate că dacă $f, g\in G$, atunci $f\circ g\in G$.

(4p) b) Să se arate că $1_{\mathbb{R}}\in G$.

(4p) c) Să se arate că $f\circ 1_{\mathbb{R}}=1_{\mathbb{R}}\circ f=f$, $\forall f\in G$.

(4p) d) Să se arate că dacă $f\in G$, $f(x)=ax+1-a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1+a}{a}$, atunci $g\in G$ și $f\circ g=g\circ f=1_{\mathbb{R}}$.

(4p) e) Să se arate că mulțimea G, împreună cu compunerea funcțiilor, formează o structură de grup comutativ .

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=x+\frac{2x}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)$.

(4p) d) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) e) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

(2p) f) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 11

Subiectul I (30p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Cât este C_8^2?

(3p) **2.** Câte numere prime are mulțimea $\{1, 2, ..., 20\}$?

(3p) **3.** Dacă mulțimea $A - B$ are 5 elemente și mulțimea $B - A$ are 3 elemente, câte elemente are mulțimea $(A \cup B) - (A \cap B)$?

(3p) **4.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 50\}$, să se dividă cu 6?

(3p) **5.** Cât este suma $1 + 4 + 7 + ... + 31$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{\int\limits_0^x f(t)dt}$?

Subiectul II (20p)

(4p) **11.** Cât este $\cos\dfrac{\pi}{4}$

(4p) **12.** Cât este $\sin\dfrac{5\pi}{4}$?

(4p) **13.** Cât este $1 + i + i^2 + ... + i^{2005}$?

(4p) **14.** Care este suma unghiurilor unui triunghi?

(2p) **15.** Cum se numește punctul situat la intersecția înălțimilor unui triunghi?

(2p) **16.** Un triunghi ABC are laturile $AB = 4$, $BC = 5$ și $AC = 6$. Care este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20p)

În mulțimea $\mathbb{Z}[X]$, se consideră submulțimea $A=\{X^2+aX+b \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

Mai considerăm mulțimea $B=\{r\in\mathbb{R} \mid \exists f\in A$ astfel încât $f(r)=0\}$.

(4p) a) Să se găsească un polinom $f\in A$, astfel încât $f(5)=0$.

(4p) b) Să se arate că $1+\sqrt{2}\in B$.

(4p) c) Să se arate că dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n}\in B$.

(2p) d) Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin B$.

(4p) e) Să se arate că dacă $a\in B$ și $k\in\mathbb{Z}$, atunci $a+k\in B$.

(2p) f) Să se demonstreze că $B\cap\left(0;\frac{1}{2}\right)\neq\varnothing$.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

(4p) a) Să se verifice că $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

(4p) b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

(4p) c) Să se arate că $a_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\int_1^n f(x)\,dx-a_n+\frac{1}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 12

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte funcții $f: \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) \neq f(b)$?

(3p) **2.** Câte elemente din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ se divid cu 3 sau 5?

(3p) **3.** Care este probabilitatea ca o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să conțină simultan elementele 1 și 2?

(3p) **4.** Care este valoarea sumei $1 + 3 + 5 + ... + 49$?

(3p) **5.** Câte elemente din mulțimea $\{C_7^0, C_7^1, ..., C_7^7\}$ sunt numere impare?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte asimptote verticale are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\int_1^2 f(x)dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x f(t)dt$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\cos\frac{\pi}{6}$?

(4p) **12.** Cât este $\sin 1° \sin 2° \cdot ... \cdot \sin 180°$.

(4p) **13.** Care sunt coordonatele punctului de intersecție al dreptelor $x + y = 2$, $2x + 3y = 5$?

(4p) **14.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1, 7)$ și $B(2, 6)$?

(2p) **15.** Care este suma unghiurilor unui poligon convex cu 5 laturi?

(2p) **16.** Care este aria triunghiului ABC, dacă $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ și $C(2, 1)$?

(4p)

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

Se consideră mulțimea $Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$. Notăm cu F mulțimea funcțiilor $f:Z[\sqrt{2}]\to\mathbb{R}$, monoton crescătoare și care verifică $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(4p) a) Să se verifice că dacă $x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x+y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(4p) b) Să se verifice că dacă $g:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{R}$, $g(x)=tx$, cu $t\in[0,\infty)$ atunci $g\in F$.

(4p) c) Să se arate că dacă $f\in F$, atunci $f(0)=0$.

(4p) d) Să se arate că dacă $f(1)=t\in\mathbb{R}$ și $f\in F$, atunci $t\geqslant 0$.

(4p) e) Să se arate că dacă $f\in F$ și $a,b\in\mathbb{Z}$, atunci $f\left(a+b\sqrt{2}\right)=af(1)+bf\left(\sqrt{2}\right)$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=e^{2x}$ și $f_{n+1}(x)=(f_n)'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(4p) a) Să se calculeze $f_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(3p) b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=2^ne^{2x}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

(3p) d) Să se calculeze suma $f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)$, $n\in\mathbb{N}$.

(3p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{f_{n+1}(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.

(3p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f_n(t)dt}{f_n(x)}$, $n\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 13

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte numere de 2 cifre se pot forma utilizând cifrele 1, 2 și 4?

(3p) **2.** Câte submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 6\}$ au elementele în progresie aritmetică?

(3p) **3.** Câte elemente din mulțimea $\{C_8^0, C_8^1, C_8^2, ..., C_8^8\}$ sunt numere impare?

(3p) **4.** Care este valoarea sumei $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63}$?

(3p) **5.** Care este partea întreagă a numărului $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{100}}$.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Câte asimptote verticale are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx$?

(3p) **10.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\frac{13\pi}{6}$?

(4p) **12.** Cât este $\cos\frac{5\pi}{2}$?

(4p) **13.** Care este conjugatul numărului complex $z = i$?

(4p) **14.** Care este suma unghiurilor unui patrulater convex?

(2p) **15.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, 3)$ și $B(0, 5)$?

(2p) **16.** Cum se numește punctul situat la intersecția mediatoarelor unui triunghi?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulțimile $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\right\}$ și $H=\left\{\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}^*\right\}$.

(4p) a) Să se verifice că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in H$.

(4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

(4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in H$, atunci $A \cdot B \in H$.

(4p) d) Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sunt două elemente din G, să se calculeze $A \cdot B$ și $B \cdot A$.

(2p) e) Să se arate că dacă $X \in H$, atunci există $Y \in H$ astfel încât $XY = I_2$.

(2p) f) Să se arate că mulțimea H înzestrată cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup comutativ.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

(4p) b) Să se verifice că $f(x) = \ln(x + 1) - \ln x$, $\forall\, x > 0$.

(4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n = \ln(n + 1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(4p) d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 14

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Care este partea reală a numărului complex i^{100}?

(3p) **2.** Câte numere impare are mulțimea $\{C_9^0, C_9^1, C_9^2, ..., C_9^9\}$?

(3p) **3.** Care este partea întreagă a numărului $(1+\sqrt{2})^2$?

(3p) **4.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{\sqrt{n} \mid n = 0, 1, ..., 9\}$ să fie număr rațional?

(3p) **5.** Dacă mulțimea A are 10 elemente, mulțimea B are 10 elemente și mulțimea $A \cap B$ are 2 elemente, câte elemente are mulțimea $(A \cup B) - (A \cap B)$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), f \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **9.** Care este ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{f'(x)}$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\cos\dfrac{5\pi}{3}$?

(4p) **12.** Dacă $\sin x = 0{,}3$, cât este $\sin(\pi + x)$?

(4p) **13.** Care este aria unui triunghi echilateral de latură a?

(4p) **14.** Care este aria unui triunghi cu laturile 5, 12 și 13?

(2p) **15.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(-1, 2)$ și $B(3, -2)$?

(2p) **16.** Care este modulul vectorului $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

(4p) a) Să se verifice că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

(4p) b) Să se verifice identitatea $X^2-3I_2=\left(X-\sqrt{3}I_2\right)\left(X+\sqrt{3}I_2\right)$, $\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(4p) c) Să se arate că dacă polinomul $f\in\mathbb{Q}[X], f=X^2-(a+d)X+ad-bc$ are o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$, atunci $a+d=0$ și $ad-bc=-3$.

(4p) d) Să se găsească o matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, cu proprietatea $B^2=3I_2$.

(2p) e) Să se arate că $\det(XY)=\det(X)\cdot\det(Y)$, $\forall X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(2p) f) Să se arate că dacă $\det(X^2-3I_2)=0$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, atunci $X^2=3I_2$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2(x+2)^2}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=f(1)+f(3)+\ldots+f(2n-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(4p) b) Să se determine ecuația asimptotei verticale a graficului funcției f.

(2p) c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n=1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(4p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(4p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_n-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 15

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte submulțimi de 3 elemente are mulțimea {1, 2, 3, 4, 5}?

(3p) **2.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea {11, 12, ..., 20} să fie pătrat perfect?

(3p) **3.** Cât este produsul $i \cdot i^2 \cdot i^3$?

(3p) **4.** Care este suma primelor două zecimale ale numărului $\sqrt{12}$?

(3p) **5.** Cât este suma $1 + 5 + 9 + ... + 29$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x), x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **8.** Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **10.** Cum este funcția f pe intervalul $(0, \infty)$: strict crescătoare sau strict descrescătoare?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Dacă $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, cât este $\cos 2x$?

(4p) **12.** Scrieți un vector paralel cu vectorul $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

(4p) **13.** Găsiți un număr complex care adunat cu $1 + 2i$ să dea un număr cu partea reală 0.

(4p) **14.** Un triunghi isoscel are latura $AB = 4$ și latura $BC = 2$. Cât este AC?

(2p) **15.** Un triunghi dreptunghic are catetele de 3 și 4. Cât este ipotenuza?

(2p) **16.** Dacă $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \dfrac{3}{5}, \cos y = \dfrac{3}{5}$, cât este $\sin(x + y)$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze matricea A^2.

(4p) c) Să se determine numărul real a, astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$.

(4p) d) Să se arate că $\det(I_2 + A^n) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(I_2 + A)^n = I_2 + n \cdot A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se calculeze determinantul matricei $B = I^2 + 2A + 3A^2 + \ldots + 2005A^{2004}$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(2p) d) Să se arate că $a_n=\dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) f) Să se determine ecuația asimptotei către ∞ și ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 16

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte submulțimi de 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 8\}$ au toate elementele pare?

(3p) **2.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să nu fie pătrat perfect?

(3p) **3.** Cât este $(1 + i)^4$?

(3p) **4.** Care este suma primelor două zecimale ale numărului $\sqrt{11}$?

(3p) **5.** Cât este suma $1 + 3 + 5 + ... + 29$?

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x - x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Cât este $\int_0^1 e^x dx$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **10.** Cum este funcția f pe intervalul $(1, \infty)$: strict crescătoare sau strict descrescătoare?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este raportul dintre lungimea medianei care cade pe ipotenuză și ipotenuză într-un triunghi?

(4p) **12.** Să se treacă în produs suma $\sin 3 - \sin 1$.

(4p) **13.** Care este perioada principală a funcției sin?

(4p) **14.** Care este produsul numerelor $1 + i$ și $1 - i$?

(2p) **15.** Cât este $|(1+i)(1+2i)|$?

(2p) **16.** Care este distanța dintre punctele $A(2, 3)$ și $B(-1, -1)$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(2p) d) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, cu proprietatea $a \circ b \in \mathbb{N}$.

(4p) e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

(2p) f) Să se arate că $(-2004) \circ (-2003) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2003 \circ 2004 < 0$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

(2p) d) Să se arate că dreapta $y = x$ este asimptota oblică către $+\infty$ la graficul funcției f.

(4p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(2p) f) Să se rezolve ecuația $f(11x) + f(1984x) = f(21x) + f(2004x)$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 17

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte submulțimi de 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 8\}$ au numai elemente pare?

(3p) **2.** Câte soluții reale are ecuația $x^4 = 1$?

(3p) **3.** Cât este i^{2004}?

(3p) **4.** Care este suma primelor două zecimale ale numărului $\sqrt{6}$?

(3p) **5.** Cât este suma $1 + 5 + 9 + ... + 49$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(3p) **8.** $\int_0^1 f(x)dx$?

(3p) **9.** Câte puncte de extrem local are funcția f?

(3p) **10.** Cum este funcția f pe intervalul $(0, \infty)$: strict crescătoare sau strict descrescătoare?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este modulul numărului $3 + 4i$?

(4p) **12.** Care este partea reală a produsului $i \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^{2005}$?

(2p) **13.** Care este aria unui triunghi cu laturile 10, 24 și 26?

(2p) **14.** Care este lungimea diagonalei patrulaterului de latură 1?

(4p) **15.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, -3)$ și $B(-2, 1)$?

(4p) **16.** Care este cel mai mare element din mulțimea $\{\cos 1°, \cos 2°, ..., \cos 89°\}$?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) b) Să se verifice că $A^2 = 3A$.

(4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A^n = 3^{n-1}A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) d) Să se determine numărul real a, astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$.

(2p) e) Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $AB \neq BA$.

(2p) f) Să se demonstreze că matricea $A + A^2 + \ldots + A^{2004} - A^{2005}$ are toate elemente strict negative.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$, $\forall n \geq \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f.

(2p) d) Să se arate că $a_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)^2+1}$, $\forall n \geq 1$.

(4p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 18

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte funcții $f: \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) < f(b)$?

(3p) **2.** Câte elemente din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ se divid cu 3 sau 5?

(3p) **3.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ sunt formate numai din numere pare?

(3p) **4.** Care este valoarea sumei $1 + 5 + 9 + ... + 49$?

(3p) **5.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{11, 12, 13, ..., 20\}$ să fie număr impar?

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte asimptote verticale are graficul funcției f ?

(3p) **9.** Cât este $\int_1^2 f'(x)dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Care este distanța dintre punctele $A(1, 1)$ și $B(-1, -1)$?

(4p) **12.** Cât este $\sin 3\pi$?

(2p) **13.** Care este aria triunghiului ABC, unde $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ și $C(1, 3)$?

(2p) **14.** Cât este $|i + i^2 + i^3 + i^4|$?

(4p) **15.** Care sunt coordonatele punctului de intersecție al dreptelor $x + 2y = 3$ și $3x + 5y = 8$?

(4p) **16.** Câte diagonale are un hexagon convex?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

Se consideră numerele raționale $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, definite prin $a_1 = 4$, $a_2 = 8$ și $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se determine numerele a_3, a_4, a_5 și a_6.

(4p) b) Să se verifice că $a_1 = a_7$ și $a_2 = a_8$.

(4p) c) Să se determine numărul a_{2004}.

(4p) d) Câte elemente din șirul de numere $a_1, a_2, ..., a_{2004}$ sunt egale cu 2?

(2p) e) Să se calculeze suma $a_1 + a_2 + ... + a_{2004}$.

(2p) f) Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2004}$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

(4p) a) Să se determine ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Să se calculeze $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$ și $f'(1)$.

(2p) d) Să se arate că $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) e) Să se arate că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $f(x) + f(y) = 2$, atunci $x = y = 1$.

(2p) f) Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{F(x)}{\ln(x^2)}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 19

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte funcții $f: \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) = f(b)$?

(3p) **2.** Câte elemente din mulțimea $\{1, 2, ..., 30\}$ se divid cu 7?

(3p) **3.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au numai elemente impare?

(3p) **4.** Care este valoarea sumei $1 + 4 + 7 + ... + 31$?

(3p) **5.** Câte soluții are ecuația $2^x = 3^x$?

Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte asimptote verticale are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\int_1^2 f(x)dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\cos 3\pi$?

(4p) **12.** Care este aria unui triunghi ABC, dacă $AB = 1$, $AC = 2$ și $\hat{A} = 30°$?

(2p) **13.** Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(5, 4)$ și $B(1, 0)$?

(2p) **14.** Care este suma unghiurilor unui hexagon convex?

(4p) **15.** Care este $|3 - 4i|$?

(4p) **16.** Cât este $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ să fie paraleli?

Scanned with OKEN Scanner

♦ *Pentru subiectele III-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul III (20 p)

Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,\,b\in\mathbb{Z}\}$. Notăm cu M, mulțimea elementelor din $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ inversabile față de înmulțirea numerelor reale care au inversul tot un element din mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(4p) a) Să se verifice că $0\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ și $1\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(4p) b) Să se verifice că, dacă $x,\,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x+y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(4p) c) Să se verifice că, dacă $x,\,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x\cdot y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(4p) d) Să se arate că $3+2\sqrt{2}$ este un element din mulțimea M.

(2p) e) Să se arate că, dacă $x,\,y\in M$, atunci $x\cdot y\in M$.

(2p) f) Să se găsească un element în mulțimea $M\cap\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=e^{3x}$ și $f_{n+1}(x)=f'_n(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

(4p) a) Să se calculeze $f_1(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(4p) b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=3^n e^{3x}$, $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

(2p) d) Să se calculeze suma $f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0),\ n\in\mathbb{N}$.

(4p) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(0)+f_2(0)+\ldots+f_n(0)}{f_{n+1}(0)}$.

(2p) f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f_{2004}(t)dt}{f_{2004}(x)}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 20

Subiectul I (30 p)

♦ *Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

(3p) **1.** Câte funcții $f: \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ există?

(3p) **2.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să se dividă cu 3 sau 5?

(3p) **3.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$ au numai elemente impare?

(3p) **4.** Care este valoarea sumei $1 + 3 + 5 + ... + 49$?

(3p) **5.** Câte soluții reale are ecuația $2^{x^2} = 4$?

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

(3p) **6.** Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?

(3p) **7.** Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

(3p) **8.** Câte asimptote verticale are graficul funcției f?

(3p) **9.** Cât este $\int_1^2 f'(x)dx$?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

Subiectul II (20 p)

(4p) **11.** Cât este $\sin\dfrac{7\pi}{2}$?

(4p) **12.** Dacă un unghi al unui triunghi isoscel are 120°, câte grade are alt unghi?

(2p) **13.** Scrieți un vector paralel cu vectorul $\vec{i} + \vec{j}$.

(2p) **14.** Câte diagonale are un poligon convex cu 7 laturi?

(4p) **15.** Dacă $\sin x = \dfrac{1}{2}$ cât este $\cos 2x$?

(4p) **16.** Care este aria unui triunghi cu laturile de 12, 35 și 37?

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea „$\circ$“ prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se verifice că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) c) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

(4p) d) Să se determine elementul $e \in \mathbb{R}$, care verifică relația $x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

(2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n = 3^{n-1}(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x^2)$.

(4p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(2p) d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(4p) e) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă către ∞.

(2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvările testelor

M_2 – varianta 1

Subiectul I

1. Din ipoteză avem $f(1) = 0$ și $f(-1) = -4$, adică $a + b = 0$ și $-a + b = -2$. De aici rezultă $a = 1$ și $b = -1$.

2. Se observă că $g = (X - 1)(X^2 + 1)$, deci $x_1 = 1$, $x_2 = i$ și $x_3 = -i$. Atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

3. Efectuând împărțirea, obținem câtul X și restul $X - 1$.

4. Avem $E_1 = 1^2 + i - i = 1$; $E_2 = i^2 + 1 - i = -i$; $E_3 = (-i)^2 + i + 1 = i$. Deci E ia doar o valoare reală.

5. $g(2^x) = 0$; notăm $2^x = t$ și obținem $g(t) = 0$, adică $t_1 = 1$, $t_2 = i$ și $t_3 = -i$. Rezultă $2^x = 1$, adică $x = 0$. În rest, nu avem rădăcini reale.

6. Avem $f'(x) = 3(x + 1)^2 - 3x^2 = 3(2x + 1)$;

7. Se vede ușor că $f'(x) < 0$, $\forall x < -\frac{1}{2}$ și $f'(x) > 0$, $\forall x > -\frac{1}{2}$.

8. Avem $f(0) + f(1) + ... + f(n) = 1^3 + 2^3 + ... + (n + 1)^3 - 0^3 - 1^3 - ... - n^3 = (n + 1)^3$.

9. Din **8.** rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + ... + f(n)}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$.

10. $A = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ((x+1)^3 - x^3)dx = \left(\frac{(x+1)^4}{4} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

Subiectul II

11. $2\sin 1 \sin 2$.

12. $\sqrt{2}$.

13. a^3.

14. 2π.

15. 1.

16. $5 - i$.

Subiectul III

a) Numărul de elemente este $A_4^3 = 24$.

b) Cu 5 se divid numerele din mulțimea A care se termină cu 5. Deci vom avea $A_3^2 = 6$ numere

Scanned with OKEN Scanner

c) $P=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

d) Cu 4 se divid numerele din mulțimea A care au ultimele 2 cifre divizibile cu 4. Adică 24, 32 sau 52. Cu 24 sunt A_2^1, adică 2 numere. În total vor fi 2 + 2 + 2 = 6 numere divizibile cu 4.

e) $P=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

f) Numere impare vor fi cele care se termină cu 3, adică $A_3^2=6$ și cele care se termină cu 5, adică $A_3^2=6$. Deci impare vor fi 12 elemente.

Subiectul IV

a) $I_0=\int_0^1\frac{1}{3x+2}dx=\frac{1}{3}\ln(3x+2)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$.

$I_1=\int_0^1\frac{x}{3x+2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x}{3x+2}dx=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{3x+2}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\ln\frac{5}{2}$.

b) Avem $3I_{n+1}+2I_n=\int_0^1\frac{(3x+2)x^n}{3x+2}dx=\int_0^1x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$.

c) Avem $x^n(1-x)\geqslant 0$, $\forall\, x\in[0,1]$.

d) Cum $x^n\geqslant x^{n+1}$, rezultă $\frac{x^n}{3x+2}\geqslant\frac{x^{n+1}}{3x+2}$, $\forall x\in[0,1]$. De aici, prin integrare, rezultă $I_n\geqslant I_{n+1}$.

e) Avem $\frac{1}{n+1}=3I_{n+1}+2I_n\leqslant 5I_n$, sau $I_n\geqslant\frac{1}{5(n+1)}$ și $\frac{1}{n}=3I_n+2I_{n-1}\geqslant 5I_n$, sau $I_n\leqslant\frac{1}{5n}$, deci $\frac{1}{5(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{5n}$.

f) Din e) rezultă $\frac{n}{5(n+1)}\leqslant nI_n\leqslant\frac{1}{5}$ și de aici avem $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 2

Subiectul I

1. $a_0 = f(0) = 2$; $a_1 = C_{20}^1 - C_{20}^1 = 0$ și $a_2 = C_{20}^2 + C_{20}^2 = 20 \cdot 19$, deci $a_0 + a_1 + a_2 = 2 + 380 = 382$.

2. $f(1) = 2^{20}$.

3. $(i+1)^4 = (i^2 + 2i + 1)^2 = (2i)^2 = -4$.

4. $f(i) = (1+i)^{20} + (1-i)^{20} = (2i)^{10} + (-2i)^{10} = 2 \cdot 2^{10} \cdot i^{10} = 2^{11} \cdot (-1) = -2^{11}$.

5. Avem $\frac{1}{4}(f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i)) =$

$= \frac{1}{4}[a_0 + a_0 + a_0 + a_0 + a_1(1-1+i-i) + a_2(1^2 + (-1)^2 + i^2 + (-i)^2) + \ldots + a_{20}(1^{20} + (-1)^{20} + i^{20} + (-i)^{20})]$.

Însă, $1^k + i^k + (-1)^k + (-i)^k = \begin{cases} 0, \text{ când } 4 \nmid k \\ 4, \text{ când } 4 \mid k \end{cases}$. Deci

$\frac{1}{4}(f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i)) = \frac{4}{4}(a_0 + a_4 + a_8 + \ldots + a_{20}) = a_0 + a_4 + a_8 + \ldots + a_{20}$. Deci valoarea expresiei este 0.

6. $f'(x) = xe^x$.

7. Se vede că $f'(x) > 0$ ne conduce la $x \in (0, \infty)$.

8. Din **6.** și **7.** rezultă $f(x) \geqslant f(0)$, sau $f(x) \geqslant -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)e^x\,dx = (x-2)e^x \Big|_0^1 = -e + 2$.

10. Se vede ușor că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x-1}{e^x} = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

Subiectul II

11. 7.

12. 0.

13. –1.

14. –1.

15. 6.

16. tg10°.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Evident, $I_2 = X(0)$, deci $I_2 \in G$.

c) Avem $X(a)X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA^2 = I_2 + (a + b + 3ab)A$.

d) Conform cu c) avem $X(a)X\left(-\frac{1}{3}\right) = X\left(a - \frac{1}{3} + 3a\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = X\left(-\frac{1}{3}\right)$.

e) Tot din c), rezultă $X(a)X\left(\frac{-a}{1+3a}\right) = X\left(a - \frac{a}{1+3a} + 3a\frac{-a}{1+3a}\right) = X(0) = I_2$..

f) Pentru $n = 1$, avem $X(a) = X(a)$, evident. Demonsrăm acum că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$:

avem $(X(a))^{n+1} = X(a)(X(a))^n = X(a) \cdot X\left(3^n\left(a+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\right) =$

$= X\left(a + 3^n\left(a+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3} + 3a\left(3^n\left(a+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\right)\right) = X\left(3^n\left(a+\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\right)$.

g) Cum $X(a)X\left(-\frac{1}{3}\right) = X\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, rezultă că produsul este $X\left(-\frac{1}{3}\right)$. Deci $t = -\frac{1}{3}$.

Subiectul IV

a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$, iar $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

c) Cum $x^n \geqslant x^{n+1}$, $\forall\, x \in [0, 1]$, rezultă $\frac{x^n}{1+x^2} \geqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2}$, $\forall x \in [0, 1]$ și, integrând, obținem $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \geqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$, adică $I_n \geqslant I_{n+1}$.

d) Avem $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \leqslant 2I_n$, de unde rezultă $I_n \geqslant \frac{1}{2(n+1)}$ și $\frac{1}{n-1} = I_n + I_{n-2} \geqslant 2I_n$, de unde rezultă $I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$. Deci $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$, $\forall n \geqslant 2$.

e) $\frac{n}{2(n+1)} \leqslant nI_n \leqslant \frac{n}{2(n-1)}$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$.

f) $\frac{n}{2(n+1)} - \frac{1}{2} \leqslant nI_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{2}$, sau $-\frac{1}{2(n+1)} \leqslant nI_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$, de unde $\frac{-\sqrt{n}}{2(n+1)} \leqslant \sqrt{n}\left(nI_n - \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$. Obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(nI_n - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 3

Subiectul I

1. Câtul împărțirii este $X-3$ și restul este 0.

2. Cum $f=(X+1)(X^2+1)$, f are rădăcinile $-i$, i și -1. Suma lor este -1.

3. Din **1.** rezultă $y_1^3-27=0$, deci $y_1^3=27$.

4. $f(i)=0$.

5. Produsul $(x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1)(x_2-y_2)(x_3-y_1)(x_3-y_2)=$

$=f(y_1)\cdot f(y_2)=(-2y_1+19)(-2y_2+19)=4\left(\frac{19}{2}-y_1\right)\left(\frac{19}{2}-y_2\right)=4g\left(\frac{19}{2}\right)=$

$=4\left(\frac{19^2}{4}+3\frac{19}{2}+9\right)=361+114+36=511.$

6. $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=0.$

7. $f(0)=\frac{\pi}{2}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}.$

9. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{2}.$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$, rezultă $y=\frac{\pi}{2}$ este asimptotă.

Subiectul II

11. 0.

12. 1.

13. 0.

14. 3.

15. 24.

16. $\frac{12}{5}$.

Subiectul III

a) $AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ și $BA=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$.

b) Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei AB este $ae+bg+cf+dh$,

Scanned with OKEN Scanner

iar a matricei BA este $ae + bg + cf + dh$, deci sunt egale.

c) $\det(A+B)+\det(A-B)=\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{vmatrix}=$

$=(a+e)(d+h)-(b+f)(c+g)+(a-e)(d-h)-(b-f)(c-g)=$

$=2(ad-bc+eh-fg)=2(\det(A)+\det(B))$.

d) Se verifică prin calcul direct că

$\det(AB) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = (ad - bc)(eh - fg) = \det A \cdot \det B$

e) Pentru $n = 1$ este evident; să demonstrăm acum că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Avem $\det(A_1...A_nA_{n+1}) = \det(A_1...A_n)\det(A_{n+1}) = \det(A_1)\ ...\ \det(A_n)\det(A_{n+1})$, deci proprietatea este adevărată.

f) În relația $\det(A_1A_2...A_n) = \det(A_1)\det(A_2)\ ...\ \det(A_n)$, luăm $A_1 = A_2 =...= A_n = A$. Rezultă $\det(A^n) = \det^n(A)$.

Subiectul IV

a) $f(-1) = 9$; $g(-1) = 0$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $g'(x) = 9x^8$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, pentru $x > -1$ avem $g(x) > g(-1) = 0$ și pentru $x < -1$ avem $g(x) < g(-1) = 0$.

d) Din punctul b) rezultă $f(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}$ pentru $x\in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Tabela de semn este:

x	$-\infty$		-1		∞
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	9	$+$	

Din tabelă rezultă $f(x) > 0$, $\forall\ x\in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Cum $f(-1) = 9 > 0$, rezultă $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) $F'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + x^8 = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

deci F este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

f) Deoarece $F'(x) = f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Deci, pentru $x > 0$ avem $F(x) > F(0) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 4

Subiectul I

1. $a_4 = 2C_5^1 i = 10i$.

2. $f(0) = 2i^5 = 2i$.

3. Cum $\Delta > 0$, $S > 0$ și $P > 0$, rădăcinile sunt reale și pozitive.

4. Avem $f = 2i(5X^4 - 10X^2 + 1)$ și atunci rădăcinile sale vor fi toate reale.

5. Reale vor fi a_3 și a_1.

6. $f'(x) = 1 + e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$, rezultă că $y = x$ este asimptota oblică a funcției f către $-\infty$.

8. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x + x}{e^x + 1} = 1$.

10. Cum $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția f nu are puncte de extrem local.

Subiectul II

11. -1.

12. $\cos 3x + \cos x$.

13. $x + y = 5$.

14. $\cos 10°$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

16. $1 - i$.

Subiectul III

a) Cum $AI_2 = I_2A = A$, rezultă $I_2 \in G$ și analog $A \in G$.

b) Fie $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $AT = \begin{pmatrix} ic & id \\ ia & ib \end{pmatrix}$, iar $TA = \begin{pmatrix} ib & ia \\ id & ic \end{pmatrix}$. Alegem $b = 1 \neq c = 2$.

Rezultă $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $AT \neq TA$ și $T \notin G$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) $A^2X = -I_2X = -X$ iar $XA^2 = X(-I_2) = -X$, deci $A^2X = XA^2$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

e) $AB = A(aI_2 + bA) = aA + bA^2$ și $BA = (aI_2 + bA)A = aA + bA^2$, deci $AB = BA$.

Scanned with OKEN Scanner

f) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și din $AX=XA$, $AX=\begin{pmatrix} ic & id \\ ia & ib \end{pmatrix}$, $XA=\begin{pmatrix} ib & ia \\ id & ic \end{pmatrix}$, rezultă $c=b$ și $d=a$,

deci $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & (-ib)i \\ (-ib)i & 0 \end{pmatrix}=aI_2-ibA$.

Subiectul IV

a) $x=-1$ este asimptota verticală.

b) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, rezultă că $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) $f(x)-1+x-x^2=\dfrac{1-(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}=\dfrac{1-1-x^3}{1+x}\leqslant 0$, $\forall\, x\geqslant 0$.

d) $f(x)-1+x-x^2+x^3=\dfrac{1-(1+x)(1-x+x^2-x^3)}{1+x}=\dfrac{1-1+x^4}{1+x}\geqslant 0$, $\forall\, x\geqslant 0$.

e) Din c) și d) rezultă $1-x+x^2-x^3\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant 1-x+x^2$, $\forall\, x\geqslant 0$.

f) Din e) rezultă $1-x^9+x^{18}-x^{27}\leqslant\dfrac{1}{1+x^9}\leqslant 1-x^9+x^{18}$, $\forall\, x\geqslant 0$, pe care integrând-o obținem $1-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{28}\leqslant\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^9}\leqslant 1-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{19}$. De aici rezultă că aria căutată, adică $\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^9}$ este un număr cuprins în intervalul $(0{,}91;\ 0{,}96)$.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 5

Subiectul I

1. Numărul de submulțimi cu 8 elemente ale mulțimii A este $C_{10}^{8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$.

2. A are $2^{10} = 1024$ submulțimi.

3. Pentru a număra câte submulțimi ale lui A îl conțin pe 1, calculăm numărul tuturor submulțimilor lui $A - \{1\}$. Sunt $2^9 = 512$ submulțimi ale lui A care îl conțin pe 1.

4. Pentru ca suma să nu fie divizibilă cu 3, nu putem aduna multipli de 3 între ei și multipli de 3 + 1 cu multipli de 3 + 2. Cei mai numeroși sunt multipli de 3 + 1, anume sunt 4. Îi combinăm cu maxim un multiplu de 3, deci numărul maxim de elemente cu proprietatea din enunț este 5.

5. Suma elementelor mulțimii A este 55, adică $\frac{10 \cdot 11}{2}$.

6. $f_0(1) = 1^{10} + 1^9 + \ldots + 1 + 1 = 11$.

7. $f_1(0) = f_0'(0) = 1$.

8. $\int_0^1 f_{2003}(x)\,dx = 0$ deoarece $f_n(x) = 0, \forall\, n \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (puterea maximă la care apare x în f_0 este 10).

9. $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(n) = 0$ din aceleași considerente ca și la **8.**, adică $f_n(x) = 0, \forall\, n \geq 11$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

10. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f_0(0) + f_1(0) + \ldots + f_n(0)}{n} = 0$ deoarece numărătorul este constant iar numitorul tinde la ∞. Numărătorul este constant deoarece pentru $n > 10$, $f_n(x) = 0$, deci suma se reduce de fapt la $f_0(0) + \ldots + f_{10}(0)$, adică la 10 constante adunate.

Subiectul II

11. 0.

12. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

13. $\frac{1}{2}$.

14. $\sin 3x + \sin x$.

15. $x + y = 7$.

16. $1 - 2i$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) $\det A = 1$.

b) $A^3 = -I_2$.

c) Deoarece $A^3 = -I_2$, avem $A^6 = (-I_2)^2 = I_2$, deci cel mai mic număr natural n pentru care $A^n = I_2$ este 6, deoarece $A^k \neq I_2$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., 5\}$.

d) $I_2 + A + ... + A^5 = I_2 + A + A^2 - I_2 - A - A^2 = O_2$ (am folosit egalitatea $A^3 = -I_2$).

e) $A + A^2 + ... + A^{2003} = I_2 + A + A^2 + ... + A^{2003} - I_2 =$

$= (I_2 + A + ... + A^5) + A^6(I_2 + A + .. + A^5) + ... + A^{1998}(I_2 + A + ... + A^5) - I_2 =$

$= O_2 + A^6 \cdot O_2 + ... + A^{1998} \cdot O_2 - I_2 = -I_2$, deci $\det(A + A^2 + ... + A^{2003}) = \det(-I_2) = 1$.

S-au putut forma grupe de câte 6 elemente deoarece suma avea 2004 termeni, iar 2004 se împarte exact la 6.

Subiectul IV

a) $f'(x) = e^x - e^{-x}$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e - e^{-1}$.

c) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^x + e^{-x})dx = e^x\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 = e - 1 - (e^{-1} - 1) = e - e^{-1}$.

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f'(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^t\Big|_0^x - e^{-t}\Big|_0^x}{e^x - e^{-x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{e^x - e^{-x}} = 1$.

e) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x}$; e este supraunitar, deci $x > -x \to x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$.

Deci funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

f) $f(x) + f(21x) = f(2x) + f(1986x)$.

Dacă $x > 0$, atunci $x < 2x \Rightarrow f(x) < f(2x)$ și $21x < 1986x \Rightarrow f(21x) < f(1986x)$;

rezultă $f(x) + f(21x) < f(2x) + f(1986x)$ și deci $x > 0$ nu poate fi soluție.

Dacă $x < 0$, atunci $x > 2x \Rightarrow f(x) < f(2x)$ și $21x > 1986x \Rightarrow f(21x) < f(1986x)$;

rezultă $f(x) + f(21x) < f(2x) + f(1986x)$ și deci $x < 0$ nu poate fi soluție.

$x = 0$ se verifică ușor că e soluție.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 6

Subiectul I

1. $x\circ y=2xy-4x-4y+10=2x(y-2)-4(y-2)+2=2(x-2)(y-2)+2$.

2. $(x\circ y)\circ z=2(x\circ y-2)(z-2)+2=2[2(x-2)(y-2)+2-2](z-2)+2=$
$=2^2(x-2)(y-2)(z-2)+2$; $x\circ(y\circ z)=2(x-2)(y\circ z-2)+2=$
$=2(x-2)[2(y-2)(z-2)+2-2]+2=2^2(x-2)(y-2)(z-2)+2$.
Deci $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$.

3. Notăm cu e elementul neutru al legii „$\circ$" și rezultă $x\circ e=e\circ x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde $2(x-2)(e-2)+2=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x-2)(2e-5)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=2{,}5$.

4. $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\circ 2=2\}=\mathbb{R}$ deoarece $x\circ 2=2(x-2)(2-2)+2=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. $(-2003)\circ(-2002)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2002\circ 2003=2$ deoarece $x\circ 2=2\circ x=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

6. Se verifică prin calcul direct că $f(x)-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,-2\}$.

7. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\infty$, deci $x=-1$ și $x=-2$ sunt asimptote verticale la graficul lui f. Rezultă că f admite două asimptote verticale.

8. Aria respectivă este egală cu $\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right|dx=$

$=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{x+2}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1-\ln(x+2)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 3+\ln 2=\ln\frac{4}{3}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}=1$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}(f(0)+f(1)+\ldots+f(n))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$.

Subiectul II

11. $1-2i$.

12. 1.

13. 2.

14. 3, 4, 5.

15. 0.

16. 0.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ are $\Delta = 16 - 12 = 4$, deci $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ sunt rădăcinile polinomului f.

b) $\det(A) = 3$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

d) $f(A) = A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$ se verifică prin calcul direct.

e) Considerăm $g : f = c$ rest r unde $gr(r) < gr(f)$; rezultă $gr(r) < 2$, deci $r = aX + b$. Din teorema de împărțire cu rest rezultă $g(x) = f(x) \cdot c(x) + ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$.

Pentru $x = 1$ avem $g(1) = a + b$, deci $a + b = 1$.

Pentru $x = 3$ avem $g(3) = 3a + b$, deci $3a + b = 3^n$. Rezolvând sistemul obținem $a = \frac{3^n - 1}{2}$ și $b = \frac{3 - 3^n}{2}$, deci restul este $\frac{3^n - 1}{2}X + \frac{3 - 3^n}{2}$.

f) În egalitatea $(*)$ de la exercițiul e) înlocuim $x = A$. Obținem $A^n = f(A) \cdot c(A) + r(A) \Rightarrow A^n = O_2 \cdot c(A) + r(A) \Rightarrow A^n = r(A)$, deci

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Subiectul IV

a) $f_1(x) = f'_0(x) = e^x(x + 1)$.

b) Cum $f_2(x) = (x + 2)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ecuația $f_2(x) = 0$ va avea soluția $x = -2$.

c) Se poate demonstra prin inducție că $f_n(x) = e^x(x + n)$.

$P(1)$: $f_1(x) = e^x(x + 1)$, adevărat. Verificarea fiind făcută, demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

$P(n + 1)$: $f_{n+1}(x) = e^x(x + n + 1)$. Dar $f_{n+1}(x) = f'_n(x) = (e^x(x + n))' = e^x(x + n + 1)$, ceea ce trebuia demonstrat.

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x(x + n + 1)}{e^x(x + n)} = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ (am folosit teorema lui l'Hospital).

Deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f_0 către $-\infty$.

f) $\int_0^1 f_1(x)\,dx = f_0(x)\Big|_0^1 = e$.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 7

Subiectul I

1. $\det A = 1$.

2. $A^3 = -I_2$, deci suma elementelor matricei A^3 este -2.

3. Cum $A^3 = -I_2$ rezultă că cel mai mic număr natural n pentru care $A^n = I_2$ este $n = 6$, deoarece $A^k \neq I_2$, $\forall\, k \in \{1, ..., 5\}$.

4. $I_2 + A + ... + A^5 = I_2 + A + A^2 - I_2 - A - A^2 = O_2$.

5. $\det(A + A^2 + ... + A^{2003}) = \det(I_2 + A + A^2 + ... + A^{2003} - I_2) =$

$$= \det\left[\underbrace{(I_2 + ... + A^5)}_{O_2} + ... + A^{1998}\underbrace{(I_2 + ... + A^5)}_{O_2} - I_2\right] = \det(-I_2) = 1.$$

6. $f'(x) = 2x(x^2 - 4) + 2x(x^2 - 1) = 2x^3 - 8x + 2x^3 - 2x = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 0$.

8. Punctele de inflexiune ale graficului lui f sunt acele puncte în care derivata a doua se anulează şi îşi schimbă semnul. $f''(x) = 12x^2 - 10$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x \in \left\{\sqrt{\frac{5}{6}}; -\sqrt{\frac{5}{6}}\right\}$; f'' îşi schimbă semnul în aceste două puncte, deci f are două puncte de inflexiune.

9. Aria cerută este egală cu

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - 5\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 4x\Big|_0^1 = {}^{3)}\frac{1}{5} - {}^{5)}\frac{5}{3} + {}^{15)}4 = \frac{38}{15}.$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x}{x^5} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

Subiectul II

11. $\sqrt{26}$.

12. 1.

13. 3.

14. $\sqrt{2}$.

15. 5.

16. $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i = x(y+i) + i(y+i) - i = (x+i)(y+i) - i$.

b) $(x \circ y) \circ z = (x \circ y + i)(z+i) - i = [(x+i)(y+i) - i + i](z+i) - i =$
$(x+i)(y+i)(z+i) - i$.

$x \circ (y \circ z) = (x+i)(y \circ z + i) - i = (x+i)[(y+i)(z+i) + i - i] - i =$
$= (x+i)(y+i)(z+i) - i$. Rezultă că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$.

c) $x \circ (-i) = -i$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

d) Din c) rezultă că expresia este egală cu $-i$.

e) Relația $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1+i)(x_2+i) \cdot \ldots \cdot (x_n+i) - i$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ o vom demonstra prin inducție matematică.

$P(1)$: $x_1 = x_1 + i - i$, adevărat. Verificarea fiind făcută, demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$P(n+1): x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_{n+1} = (x_1+i)(x_2+i) \cdot \ldots \cdot (x_{n+1}+i) - i$.

Știm că $P(n): x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1+i)(x_2+i) \cdot \ldots \cdot (x_n+i) - i$ este adevărată, deci

$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_{n+1} = (x_1 \circ \ldots \circ x_n + i)(x_{n+1}+i) - i =$
$= [(x_1+i)(x_2+i) \cdot \ldots \cdot (x_n+i) - i + i](x_{n+1}+i) - i = (x_1+i)(x_2+i) \cdot \ldots \cdot (x_{n+1}+i) - i$, ceea ce trebuia demonstrat.

f) $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i \Leftrightarrow (x+i)^4 - i = 1 - i \Leftrightarrow (x+i)^4 = 1$ deci ecuația are 4 soluții în $\mathbb{C}$. Acestea sunt $x_1 = 1 - i$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2i$, $x_4 = -1 - i$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 6x + 3$.

b) $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$, deci f este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ și cum $f'(x) \leqslant 0$ pe $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

c) $f''(x) = 6 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$, deci valoarea minimă a funcției f este $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{4}$.

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(0) + f(1) + .. + f(n)}{n^3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + \ldots + (n+1)^3 - n^3}{n^3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$.

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 3x + 1}{x(6x+3)} = \frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

M_2 – varianta 8

Subiectul I

1. $g : f = X - 1$ rest 0.

2. Dacă x_i este rădăcină pentru f, atunci $x_i^2 + x_i + 1 = 0$, $\forall i = \overline{1, 2}$. Prin înmulțirea egalității cu $x_i - 1$ obținem $x_i^3 - 1 = 0$, $\forall i = \overline{1, 2}$, deci $x_i^3 = 1$, $\forall i = \overline{1, 2}$. Rezultă $x_1^3 - x_2^3 = 0$.

3. $x_1 + x_2 + x_1x_2 = s + p$, unde $s = x_1 + x_2$, $p = x_1x_2$. Din relațiile lui Viète rezultă $s = -\frac{b}{a} = -1$, $p = \frac{c}{a} = 1$, deci $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0$.

4. Cum $x_i^3 = 1$, rezultă că $(x_i^3)^{668} = x_i^{2004} = 1$, $\forall i = \overline{1, 2}$, deci $x_1^{2004} + x_2^{2004} = 2$.

5. $1 + x_1 + x_1^2 + \ldots + x_1^{21} = \frac{x_1^{22} - 1}{x_1 - 1} = \frac{(x_1^3)^7 \cdot x_1 - 1}{x_1 - 1} = \frac{x_1 - 1}{x_1 - 1} = 1$.

6. Se verifică prin calcul direct că $f(x) - 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$, $\forall x \in [0, \infty)$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, deci $y = 2$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f.

8. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$.

9. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = 2x\Big|_0^1 - \ln(x+1)\Big|_0^1 - \ln(x+2)\Big|_0^1 =$

$= 2 - \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2 - \ln 3$.

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}(2x - \ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln 2) = 2$.

Subiectul II

11. 5.

12. π.

13. $\cos\frac{\pi}{5}$.

14. 9.

15. –2.

16. 2.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) Deoarece $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{f(1)+f(n)}{2} \cdot n = n^2$, rezultă $f(1) + f(2) + \ldots + f(2003) = 2003^2$.

b) Cum $f(x) = 2x - 1$, avem că mulțimea $\{f(x) \mid x \in \mathbf{Z}\}$ este formată numai din numere impare, deci $\mathbf{Z} - \{f(x) \mid x \in \mathbf{Z}\}$ este infinită, conținând toate numerele pare.

c) $x \neq y$ ne conduce la $2x - 2 \neq 2y - 1$, deci $f(x) \neq f(y)$.

d) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$, $\forall\, x \in \mathbf{Z}$.

e) $(h \circ f)(x) = x$ ne conduce la $h(f(x)) = x$ sau $h(2x - 1) = x$. Atunci $h(2x)$ se poate defini oricum, deci vom avea o infinitate de funcții $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, cu proprietatea $(h \circ f)(x) = x$.

f) $(f \circ g)(x) = x$ ne conduce la $2g(x) - 1 = x$ sau $g(x) = \frac{x+1}{2}$. Aceasta arată că dacă x este număr par, $g(x) \notin \mathbf{Z}$, fals. Deci nu există nici o funcție $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ cu proprietatea $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{Z}$.

Subiectul IV

a) $f_0(1) = 101$.

b) $f_1(x) = 100x^{99} + 99x^{98} + \ldots + 2x + 1$, deci $f_1(0) = 1$.

c) Cum $f_{101}(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă $f_n(x) = 0$, $\forall\, n \geqslant 101$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Cum $f_n(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \geqslant 101$, rezultă $f_{2003}(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deci $\int_0^1 f_{2003}(x)dx = 0$.

e) $\lim_{n\to\infty} f_n(n) = 0$, deoarece $f_n(n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 101$.

f) Cum $f_0(0) + f_1(0) + \ldots + f_n(0) = f_0(0) + f_1(0) + \ldots + f_{100}(0) =$ constant, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{f_0(0) + f_1(0) + \ldots + f_n(0)}{n} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 9

Subiectul I

1. Vom găsi progresiile 1, 2, 4; 2, 4, 8; 1, 3, 9 și 4, 6, 9, deci 4 progresii.

2. Probabilitatea este 0,3.

3. $C_5^3 = 10$.

4. $5\sqrt{2} = \sqrt{50} = 7{,}07...$ deci 7.

5. $1 + 5 + ... + 49 = 325$.

6. $f'(x) = e^x - 1$.

7. $f'(0) = 0$.

8. $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$.

9. Funcția f are un punct de extrem local.

10. Funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

Subiectul II

11. 5.

12. 3.

13. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. -1.

15. $\frac{15}{2}$.

16. Centrul cercului înscris.

Subiectul III

a) Ecuația $x^2 - px = 0$ are soluția $x = p$, deci $p \in A$.

b) Ecuația $x^2 - 2x - 1 = 0$ are soluțiile $x = 1 \pm \sqrt{2}$, deci $x = 1 - \sqrt{2} \in A$.

c) Dacă $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$, atunci $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + b = 0$ sau $5 + 2\sqrt{6} + a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + b = 0$ sau $a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -(b + 5 + 2\sqrt{6})$ sau $a^2(5 + 2\sqrt{6}) = (b + 5)^2 + 4\sqrt{6}(b + 5) + 24$. De aici rezultă $2a^2 = 4(b + 5)$ și $5a^2 = (b + 5)^2 + 24$ sau $a^2 = 2b + 10$, care conduce la $5(2b + 10) = b^2 + 10b + 49$ sau $b^2 = 1$. Dacă $b = 1$, atunci $a^2 = 12$, fals, iar dacă $b = -1$, atunci $a^2 = 8$, fals. deci $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin A$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Fie $r=\frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, $r \in A$. Atunci $r^2 + ar + b = 0$ sau $p^2 + apq + q^2b = 0$ sau $p^2 = -q(ap + qb)$, de unde $q \mid p^2$, fapt care conduce la $q = 1$, deci $r = p \in \mathbb{Z}$.

e) Ecuația $x^2 - 2kx + k^2 - k = 0$ are soluțiile $k \pm \sqrt{n}$, deci $k+\sqrt{n} \in A$.

f) Cum $\sqrt{2}-1 \in A$ și $0<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$, rezultă $A \cap \left(0, \frac{1}{2}\right) \neq \varnothing$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b)

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$, deci $y = x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

e) $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$.

f) Se vede ușor că $x \neq 0$ este soluție. Dacă $x < 0$, atunci $11x > 21x$ și $f(11x) < f(21x)$, apoi $1984x > 2004x$ și $f(1984x) < f(2004x)$, deci $f(11x) + f(1984x) < f(21x) + f(2004x)$, deci $x < 0$ nu este soluție.

Dacă $x > 0$, atunci $11x < 21x$ și $f(11x) < f(21x)$ iar $1984x < 2004x$ și $f(1984x) < f(2004x)$. Deci $f(11x) + f(1984x) < f(21x) + f(2004x)$ și nici $x > 0$ nu poate fi soluție. Deci soluția $x = 0$ este unică.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 10

Subiectul I

1. O astfel de submulțime este alcătuită dintr-un număr par și un număr impar. Deci sunt 9 submulțimi.

2. $C_6^2 = 15$.

3. Probabilitatea este 0,4.

4. $2\sqrt{3} = \sqrt{12} = 3,46...$, deci răspuns 24.

5. $3 + 6 + ... + 30 = 165$.

6. $f'(x) = 3x^2 - 12$.

7. $f'(1) = -9$.

8. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

9. Funcția are 2 puncte de extrem local.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xf(x)}{\int_0^x f(t)dt} = 4$.

Subiectul II

11. $\dfrac{1}{2}$.

12. 0.

13. $\sqrt{2}$.

14. $-i$.

15. 6.

16. $x + y = 6$.

Subiectul III

a) Dacă $f(x) = ax + 1 - a$ și $g(x) = bx + 1 - b$, atunci $f \circ g(x) = abx + 1 - ab$, deci $f \circ g \in G$.

b) Pentru $a = 1$ obținem $f(x) = x \in G$.

c) Evident.

d) Evident.

e) Din a), „$\circ$" este lege internă pe G. Apoi „$\circ$" este în general asociativă, are element neutru (1_R) și din d) orice element are simetric. Se verifică apoi că $f \circ g = g \circ f$, deci $(G, \circ)$ este grup comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV

a) Evident.

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, deoarece f este impară.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = 0$.

d) Analog, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 0$, deci $y = x$ este asimptotă oblică către $-\infty$ la graficul funcției f.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

f) Cum $f'(x) = \dfrac{x^4+3}{(x^2+1)^2} > 0$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 11

Subiectul I

1. $C_8^2 = 28$.

2. 8 numere prime.

3. $(A \cup B) - (A \cap B)$ are 8 elemente.

4. Probabilitatea este 0,16.

5. Suma este 176.

6. $f'(x) = 3x^2 + 1$.

7. $f'(0) = 1$.

8. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

9. Funcția f este strict crescătoare, deci nu are puncte de extrem local.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xf(x)}{\int_0^x f(t)dt} = 4$.

Subiectul II

11. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $1 + i$.

14. $180°$.

15. Ortocentru.

16. $\dfrac{8}{\sqrt{7}}$.

Subiectul III

a) $f = x^2 - 5x$ verifică $f(5) = 0$.

b) $f = x^2 - 2x - 1$ are rădăcinile $1 \pm \sqrt{2}$, deci $1 + \sqrt{2} \in B$.

c) $f = x^2 - n$ verifică $f(\sqrt{n}) = 0$.

e) Dacă $f(a) = 0$, atunci $g(x) = f(x - k)$ verifică $g \in A$ și $g(a + k) = f(a) = 0$.

f) Cum $\sqrt{2} - 1 \in B$ rezultă $B \cap \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \neq \varnothing$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV

a) Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, rezultă că $x=0$ este asimptotă verticală.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$

$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

e) $\int_1^2 f(x)dx=\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\int_1^n f(x)dx-a_n+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\frac{-n^2-2n-1+n^2+n+n}{n(n+1)^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^3}{n(n+1)^2}=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 12

Subiectul I

1. Sunt 6 funcții.

2. Sunt 5 elemente.

3. Probabilitatea este 0,25.

4. Suma este 625.

5. Sunt 8 numere impare.

6. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

7. $f'(1) = -1$.

8. $x = 0$ asimptotă verticală.

9. $\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln 2$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(t)dt}{\ln x}=1$.

Subiectul II

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. 0.

13. (1, 1).

14. $x + y = 8$.

15. 540°.

16. $\frac{1}{2}$.

Subiectul III

a) $x+y=a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}=(a+c)+\sqrt{2}(b+d)\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

b) $g(x+y)=t(x+y)=tx+ty=g(x)+g(y)$, $\forall x,y\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

c) Din ipoteză, pentru $x = y = 0$, rezultă $f(0) = f(0) + f(0)$. Deci $f(0) = 0$.

d) Cum $0 < 1$, rezultă $f(0) \leqslant f(1)$, deci $t \geqslant 0$.

e) Arătăm inductiv că $f(a_1 + ... + a_n) = f(a_1) + ... + f(a_n)$. Pentru $n = 1$ și $n = 2$ este evident; apoi $f(a_1 + ... + a_n + a_{n+1}) = f(a_1 + ... + a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + ... + f(a_n) + f(a_{n+1})$, deci demonstrația este încheiată. De aici rezultă că $f(nx) = nf(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ și $\forall\, x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Scanned with OKEN Scanner

și apoi $f(kx)=kf(x), \forall k\in\mathbb{Z}$ și $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Atunci $f(a+b\sqrt{2})=f(a)+f(b\sqrt{2})=af(1)+bf(\sqrt{2}), \forall a, b\in\mathbb{Z}$.

Subiectul IV

a) $f_1(x)=(e^{2x})'=2e^{2x}$.

b) Cum verificarea s-a făcut la punctul a), să demonstrăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Avem $f_{n+1}(x)=(f_n)'(x)=(2^n e^{2x})'=2^{n+1}e^{2x}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcției f.

d) $f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)=1+2+\ldots+2^n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{f_{n+1}(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2x}(2+2^2+\ldots+2^n)}{e^{2x}\cdot 2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}=1$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f_n(t)dt}{f_n(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_{n-1}(x)-f_{n-1}(0)}{f_n(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x\cdot 2^{n-1}-2^{n-1}}{e^x\cdot 2^n}=\dfrac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 13

Subiectul I

1. Putem forma 9 numere.

2. Avem progresiile 1, 2, 3; 1, 3, 5; 2, 3, 4; 2, 4, 6; 3, 4, 5; 4, 5, 6, deci 6 progresii.

3. Sunt 2 numere impare.

4. Suma este $2^{64} - 1$.

5. Cum $\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{100}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{100}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^{100}}}{2}\in(0,1)$, rezultă că are partea întreagă 0.

6. $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

7. $f'(0)=0$.

8. Funcția f nu are asimptote verticale.

9. $\int_0^1(x^2+1)f(x)\,dx=\int_0^1(x^2+2)dx=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$.

10. Funcția f are un punct de extrem local.

Subiectul II

11. $\frac{1}{2}$.

12. 0.

13. $-i$.

14. 360°.

15. $x + y = 5$.

16. Centrul de greutate.

Subiectul III

a) $a = 1 \Rightarrow I_2 \in H$.

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $a, c \neq 0$.

c) $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 1-ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $AB = BA = I_2$.

Scanned with OKEN Scanner

e) $X=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) Din c) rezultă că înmulțirea este lege internă pe H. Apoi, este asociativă, are element neutru (pe I_2) și din e) fiecare element are simetric. Verificăm că $XY = YX$, $\forall X, Y \in H$ și deci avem grup comutativ.

Subiectul IV

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Evident.

c) Când $n = 0$ este evident, apoi

$a_{n+1} = a_n + f(n + 1) = \ln(n + 1) + \ln(n + 2) - \ln(n + 1) = \ln(n + 2)$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$.

f) $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \ln(x+1)dx-\int_1^2 \ln(x)dx=(x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2-(x+1)\Big|_1^2-x\ln x\Big|_1^2+x\Big|_1^2=$

$=3\ln 3-2\ln 2-1-2\ln 2+1=3\ln 3-4\ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 14

Subiectul I

1. Partea reală este 1.

2. Mulţimea are 4 numere impare.

3. Partea întreagă este 5.

4. Probabilitatea este 0,4.

5. Mulţimea are 16 elemente.

6. $f'(x) = e^x$.

7. $f'(0) = 1$.

8. $\int_0^1 f(x)dx = e-1$.

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ a graficului funcţiei f.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 1$.

Subiectul II

11. $\frac{1}{2}$.

12. –0,3.

13. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

14. 30.

15. $x + y = 1$.

16. 0.

Subiectul III

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Evident.

c) Din $f(\sqrt{3}) = 0$, rezultă $3-\sqrt{3}(a+d)+ad-bc=0$, care ne conduce la $a + d = 0$ şi $ad - bc = -3$, deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

d) Alegem $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ care verifică cerinţa.

e) Se demonstrează prin calcul direct.

f) Din ipoteză $0=\det(X^2-3I_2)=\det[(X-\sqrt{3}I_2)(X+\sqrt{3}I_2)]=\det(X-\sqrt{3}I_2)\cdot\det(X+\sqrt{3}I_2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\det(X-\sqrt{3}I_2)=0$, obținem considerând $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ că $a+d=0$ și $ad-bc=-3$, de unde rezultă $X^2=3I_2$, iar dacă $\det(X+\sqrt{3}I_2)=0$, suntem conduși la același rezultat.

Subiectul IV

a) Evident.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$, deci $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

c) $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx-\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^2+\frac{1}{x+2}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

d) Pentru $n=1$ este evident, apoi

$$a_{n+1}=a_n+f(2n+1)=1-\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+3)^2}=1-\frac{1}{(2n+3)^2}.$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{1}{(2n+3)^2}-1\right)=\frac{-1}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 15

Subiectul I (30 p)

1. Sunt $C_5^3 = 10$ submulțimi

2. Probabilitatea este 0,1.

3. Produsul este – 1

4. Suma este 10.

5. Suma este 120.

6. $f'(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $f'(0) = 0$.

8. $\int_0^1 (e^x - x)dx = e - 1 - \frac{1}{2} = e - 1{,}5$.

9. Există un singur punct de extrem local.

10. Pe $(0, \infty)$, f este strict crescătoare.

Subiectul II (20 p)

11. 0.

12. $4\vec{i} + 6\vec{j}$.

13. $2 + i$.

14. 4.

15. 5.

16. 1.

Subiectul III (20 p)

a) $\det(A) = 0$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 + A + aA = I_2 + (a + 1)A$.
Pentru a obține $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$, trebuie ca $a + 1 = 0$, deci $a = -1$.

d) Cum $A^2 = O_2$, rezultă că $A^n = O_2$, $\forall n \geq 2$.
Deci $\det(I_2 + A^n) = \det I_2 = 1$, $\forall n \geq 2$.

e) Pentru $n = 1$ este evidentă egalitatea.
Apoi $(I_2 + A)^{n+1} = (I_2 + A)^n(I_2 + A) = (I_2 + nA)(I_2 + A) = I_2 + (n + 1)A$, deci $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ s-a demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

f) $B = I_2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ și $\det(B) = 1$.

Subiectul IV (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

c) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

d) $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} =$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

f) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă către $+\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 16

Subiectul I (30 p)

1. Avem $C_4^3 = 4$ submulțimi.

2. Probabilitatea este 0,7.

3. $(1 + i)^4 = -4$.

4. Suma este 4.

5. Suma este 225.

6. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \forall x > 0$.

7. $f'(1) = 0$.

8. $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

9. Funcția are un singur punct de extrem local.

10. Funcția este strict descrescătoare pe intervalul $(1, \infty)$.

Subiectul II (20 p)

11. $\frac{1}{2}$.

12. 2sin1cos2.

13. 2π.

14. 2.

15. $\sqrt{10}$.

16. 5.

Subiectul III (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $x \circ (y \circ z) = 2(x+1)(y \circ z+1) - 1 = 2^2(x+1)(y+1)(z+1) - 1 = (x \circ y) \circ z$.

c) $x \circ e = x$ ne conduce la $2(x + 1)(e + 1) = x + 1$ sau $e + 1 = \frac{1}{2}$ sau $e = -\frac{1}{2}$.

d) $a \circ b = 2(a+1)(b+1) - 1$ și dacă luăm $a = b = -1 + \sqrt{2}$, problema este rezolvată.

e) $x \circ y = -1$ ne conduce la $2(x + 1)(y + 1) = 0$, deci $x = -1$ sau $y = -1$.

f) $(-2004) \circ (-2003) \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2003 \circ 2004 = -1 < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV (20 p)

a) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Cum $f'(x) < 0$, $\forall x < 0$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și din $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$, deci $y = x$ este asimptotă spre $-\infty$.

e) $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\big|_0^1=\sqrt{2}-1$.

f) Dacă $x < 0$, atunci $11x > 21x \Rightarrow f(11x) < f(21x)$ și $1984x > 2004x \Rightarrow$ $\Rightarrow f(1984x) < f(2004x)$, deci $f(11x)+f(1984x) < f(21x) + f(2004x)$, deci $x < 0$ nu poate fi soluție. Analog, $x > 0$ nu poate fi soluție. Rămâne că $x = 0$ este soluție unică.

Scanned with OKEN Scanner

M2

Varianta 17

Subiectul I (30 p)

1. Avem $C_4^3 = 4$ submulţimi.

2. Ecuaţia are 2 soluţii reale.

3. $i^{2004} = 1$.

4. Suma este 8.

5. Suma este 325.

6. $f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $f'(0) = 1$.

8. $\int_0^1 f(x)dx = e - 1 - 1 = e - 2$.

9. Funcţia nu are puncte de extrem local.

10. Funcţia este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

Subiectul II (20 p)

11. 5.

12. 0.

13. 120.

14. $\sqrt{2}$.

15. $x + y + 1 = 0$.

16. $\cos 1°$.

Subiectul III (20 p)

a) $\text{Det}(A) = 0$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) Cum verificarea este făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$; $A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1}A \cdot A = 3^n A$.

d) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 + A + aA + 3aA = I_2 + (4a + 1)A = I_2$. Deci $4a + 1 = 0$ sau $a = -\frac{1}{4}$.

e) Dacă $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix}$, iar $BA = \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}$. Deci dacă $2b \neq c$ se rezolvă problema. Luăm $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

f) $A + A^2 + ... + A^{2004} - A^{2005} = A + 3A + ... + 3^{2003}A - 3^{2004}A =$

$= A\left(\frac{3^{2004}-1}{3-1} - 3^{2004}\right) = -\frac{3^{2004}+1}{2}A.$

Deci matricea are toate elementele strict negative.

Subiectul IV (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că $y = 0$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$.

d) $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) = \frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{3^2+1} + ... + \frac{1}{n^2+1} -$

$- \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

f) $\int_0^1 f(x)\,dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 - \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}2$.

Scanned with OKEN Scanner

M2
Varianta 18

Subiectul I (30 p)

1. Există 3 funcții cu proprietatea cerută.

2. 5 elemente.

3. 3 submulțimi.

4. Suma este 325.

5. Probabilitatea este 0,5.

6. $\frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

7. $f'(1) = 1$.

8. Există o asimptotă verticală.

9. $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = \ln 2$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Subiectul II (20 p)

11. $\sqrt{8}$

12. 0.

13. 2.

14. 0.

15. (1, 1).

16. 9.

Subiectul III (20 p)

a) $a_3 = \frac{a_2}{a_1} = 2$; $a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$; $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

b) $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4 = a_1$; $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 = a_2$.

c) Cum $a_7 = a_1$ și $a_8 = a_2$, inductiv se arată că $a_{n+6} = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Verificarea fiind făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

$a_{n+7}=\frac{a_{n+6}}{a_{n+5}}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_{n+1}$, deci afirmația este justificată. Atunci $a_{2004}=a_6=\frac{1}{2}$.

d) Cum $a_3=2$, iar în șirul $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ avem 334 de grupe de câte 6 elemente, vom găsi că elementul 2 apare de 334 de ori.

c) $a_1+a_2+\ldots+a_{2004}=334(a_1+\ldots+a_6)=334\left(4+8+2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$.

f) $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2004}=(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_6)^{334}=\left(4\cdot 8\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\right)^{334}=1$.

Subiectul IV (20 p)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) $f'(x)=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f(-1)=-1$; $f(1)=1$, $f'(-1)=0$; $f'(1)=0$.

d) Inegalitatea $-1\leqslant f(x)$ este echivalentă cu $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\geqslant 0$ sau $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geqslant 0$, evident. Inegalitatea $f(x)\leqslant 1$ ne conduce la $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geqslant 0$, evident.

e) Din d) avem $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ și $f(x)=1$ dacă și numai dacă $x=1$. Atunci ecuația $f(x)+f(y)=2$ ne conduce la $f(x)=f(y)=1$ sau $x=y=1$.

f) Din regula lui L'Hospital, avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\ln(x^2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$.

Scanned with OKEN Scanner

M2

Varianta 19

Subiectul I (30 p)

1. Sunt 3 funcții.

2. Sunt 4 elemente.

3. Sunt 7 submulțimi.

4. Suma este 176.

5. Ecuația are 1 soluție reală.

6. $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

7. $f'(1)=0$.

8. Există o asimptotă verticală.

9. $\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

Subiectul II (20 p)

11. -1.

12. 1.

13. $x-y=1$.

14. 720°.

15. 5.

16. 4.

Subiectul III (20 p)

a) $0=0+0\sqrt{2}\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și $1=1+0\sqrt{2}\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

b) Fie $x=a+b\sqrt{2}$ și $y=c+d\sqrt{2}$, $a, b, c, d\in\mathbf{Z}$. Atunci $x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

c) $xy=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

d) Din $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$, rezultă cerința.

e) Pentru $x\in M$, există $x'\in M$, astfel încât $xx'=1$, iar pentru $y\in M$, există $y'\in M$, astfel încât $yy'=1$. Atunci, pentru $xy\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ există elementul $x'y'\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ cu

Scanned with OKEN Scanner

proprietatea $xyx'y' = 1$, deci $xy \in M$.

f) $3-2\sqrt{2} \in M$ și $0<3-2\sqrt{2}<\frac{1}{2}$.

Subiectul IV (20 p)

a) $f_1(x)=(e^{3x})'=3e^{3x}$.

b) Verificarea fiind făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$;
$f_{n+1}(x)=\left(f_n(x)\right)'=(3^n e^{3x})'=3^{n+1}e^{3x}$.

c) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, rezultă că $y = 0$ este ecuația abscisei spre $-\infty$.

d) $f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)=1+3+\ldots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(0)+f_2(0)+\ldots+f_n(0)}{f_{n+1}(0)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f_n(t)dt}{f_n(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}=\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

M2

Varianta 20

Subiectul I (30 p)

1. Sunt 9 funcții.

2. Probabilitatea este 0,5.

3. Sunt 3 submulțimi.

4. Suma este 625.

5. 2 soluții reale.

6. $f'(x)=1+\frac{1}{x}$.

7. $f'(1)=2$.

8. Există o asimptotă verticală.

9. $\int_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=1+\ln 2$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

Subiectul II (20 p)

11. -1.

12. $30°$.

13. $2\vec{i}+2\vec{j}$.

14. 14.

15. $\frac{1}{2}$.

16. 210.

Subiectul III (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $(x\circ y)\circ z=3(x\circ y+1)(z+1)-1=3^2(x+1)(y+1)(z+1)-1=x\circ(y\circ z)$.

c) $a\circ b=3(a+1)(b+1)-1$. Luăm $a=\frac{15}{2}-1$, $b=\frac{2}{3}-1$ și se verifică cerința.

d) $x\circ e=x$ sau $3(x+1)(e+1)=x+1$ sau $e+1=\frac{1}{3}$ sau $e=-\frac{2}{3}$.

e) $x\circ y=-1$ sau $3(x+1)(y+1)=0$ de unde rezultă $x+1=0$ sau $y+1=0$.

f) Pentru $n=2$ și $n=3$ s-a verificat. Apoi

$$\underbrace{a_1\circ a_2\circ\ldots\circ a_n}_{x}\circ a_{n+1}=x\circ a_{n+1}=3(x+1)(a_{n+1}+1)-1=3^n(a_1+1)\ldots(a_n+1)(a_{n+1}+1)-1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)=-1$.

c) $f'(x)=2x-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

d) Cum $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}(x^4+2x^2+1-1)=\dfrac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$, rezultă că $f'(x)<0$, $\forall\, x<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x)>0$, $\forall\, x>0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

e) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că f nu admite asimptotă către ∞.

f) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(x^2-1)\,dx+\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a IX-a

SE ADRESEAZĂ URMĂTOARELOR TIPURI DE LICEE:

- **liceul teoretic:** specializarea filologie
- **liceul vocațional:** profil artistic, specializările: arte plastice, muzică, teatru, coregrafie; profil pedagogic, profil sportiv, profil teologic; profil militar, specializarea muzici militare

CONȚINUTURI

Algebră

1. Operații cu numere reale

- forme de scriere a unui număr rațional
- puteri cu exponent întreg
- radicali de ordinul 2 sau 3
- compararea a două numere reale
- priorități în efectuarea unui calcul numeric sau algebric
- rotunjiri, aproximări, trunchieri

2. Rezolvări de ecuații

- ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
- ecuații reductibile la cele studiate

3. Elemente de logică matematică *și teoria mulțimilor*

- enunț, propoziție, valoare de adevăr
- cuantificatori
- operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență) corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate)
- tipuri de raționamente logice: reducere la absurd, inducție matematică

4. Funcții

- lecturi grafice, grafice statistice
- funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$
  - monotonie; semn; reprezentarea grafică a funcției
  - separarea planului în regiuni; inecuații de forma $ax + b \leqslant 0$ $(\geqslant, <, >)$
  - sisteme de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p, \end{cases}$ a,b,c,m,n,p numere reale
- **funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx+c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$*

Scanned with OKEN Scanner

- **monotonia, rata creșterii (descreșterii)*
- **reprezentarea grafică a funcției*
- **semnul funcției*
- **inecuații de forma* $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ $(\geqslant, <, >)$

Geometrie

5. Elemente de geometrie

- Congruența și asemănarea triunghiurilor
- Simetrie axială și centrală
- Reprezentări în perspectivă
- **Paralelism și perpendicularitate*
- **Relații metrice*
- **Rezolvarea triunghiului dreptunghic.*

Scanned with OKEN Scanner

SE ADRESEAZĂ URMĂTOARELOR SPECIALIZĂRI:

• filiera teoretică: specializarea filologie

• filiera vocațională, profilul sportiv, profilul teologic, profilul pedagogic, profilul militar (M.Ap.N.): specializarea muzici militare, profilul arte vizuale: specializările arte plastice și decorative, muzică, teatru, coregrafie.

Clasa a X-a

Calcul numeric aplicat

• Procente, dobândă, dobânda compusă; elemente de calcul financiar pe o perioadă determinată (buget personal, buget familial)

• Media aritmetică, media geometrică, media armonică

Elemente de combinatorică

• Probleme de numărare

• **Permutări, aranjamente, combinări*

Funcții, ecuații și inecuații

• Ecuație; soluție; rezolvarea unei ecuații; aproximarea soluțiilor; numărul de soluții ale unei ecuații

• Reprezentări grafice ale unor fenomene ce pot fi modelate prin ecuații

• Lecturi grafice pentru următoarele tipuri de funcții:

- funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a,b \in \mathbb{R}$
- funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- **funcția exponențială; funcția logaritmică*

Ecuații de gradul I și al II-lea

**Ecuații exponențiale și logaritmice reductibile la forma $ax + b = 0$, sau la forma $ax^2 + bx + c = 0$*

**Sisteme de forma $y = mx + n$, $y = ax^2 + bx + c$*

• Separarea planului în regiuni; interpretarea grafică a mulțimii soluțiilor unor ecuații și inecuații

• Interpretarea grafică a rezolvării unor sisteme de ecuații și inecuații

Elemente de logică

• Logica predicatelor (cuantificatori, operații logice)

• Exemple de descriere logică a structurii unui enunț matematic sau nematematic

• Silogisme

• **Paradoxuri logice*

Elemente de geometrie

• Figuri geometrice plane și spațiale generate prin simetrie, translație și rotație

• Acoperiri, parchetări

• Reprezentarea în perspectivă a unor corpuri geometrice

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

Statistică

- Tabele de date
- Histograme
- Eşantionare
- Valoare medie; medii. Frecvenţa
- Grafice statistice

Calcul matriceal şi sisteme liniare

- Matrice: matrice linie, matrice coloană, matrice pătratică
- Operaţii cu matrice: Suma a două matrice; Produsul unei matrice cu un număr real; Produsul a două matrice
- Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3. Aplicaţii: aria unui triunghi; coliniaritatea a trei puncte
- Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar; metode de rezolvare a sistemelor liniare (metoda lui Cramer, metoda lui Gauss)

Grafuri

- Graf: graf arbore, alte grafuri
- Drumuri optime
- Strategii optime reprezentate prin drumuri pe graf

Elemente de geometrie

- Localizarea unui punct în raport cu un sistem cartezian de coordonate în plan sau spaţial
- Determinarea unor distanţe, arii sau volume

Clasa a XII-a

Elemente de teoria jocurilor

- Sisteme de reguli ce generează un joc
- **Noncontradicţia regulilor*
- Jocuri finite
- **Strategii de optimizare*

Elemente de statistică şi probabilităţi

- Probleme de numărare
- Date statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice: diagrame circulare, diagrame prin benzi, histograme
- Frecvenţa. Medii; dispersia
- Operaţii cu evenimente
- Evenimente aleatoare egal probabile

Probabilitatea unui eveniment

Scanned with OKEN Scanner

M3-toate specializările

I. Statutul disciplinei .

Matematica este disciplină obligatorie de examen – *proba d* și disciplină la alegere din profilul opus – *proba f.*

II. Competențe de evaluat

1. Identificarea relațiilor între noțiunile matematice studiate

2. Interpretarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual cuprinse în enunțuri matematice

3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete

4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete

5. Analiza de unei situații-problemă în scopul descoperirii de strategii pentru optimizarea soluțiilor

În plus, se vor avea în vedere și competențele specifice din programa școlară.

III. Conținuturi

Clasa a IX-a

Algebră.

Elemente de geometrie.

Clasa a X-a

Calcul numeric aplicat.

Elemente de combinatorică.

Funcții, ecuații și inecuații.

Notă. Conținuturile programei de bacalaureat sunt incluse în conținuturile programei școlare din curriculumul nucleu și curriculumul nucleu aprofundat al profilului (Se cer și capitolele marcate cu steluță în programa școlară). Toate subiectele vor fi elaborate în concordanță cu programa școlară , fără a reflecta în mod special viziunea unui manual anume.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Clasa a IX-a, M_3
Numere reale

Partea întreagă a unui număr a este cel mai mare întreg mai mic decât numărul a și se notează $[a]$. *Partea fracționară* a unui număr a este diferența dintre număr și partea sa întreagă și se notează $\{a\}$. Avem $\{a\} = a - [a]$.

Pentru $x \in \mathbb{R}$, avem: $[x] \leqslant x < [x] + 1$; $\quad x - 1 < [x] \leqslant x$; $\quad 0 \leqslant \{x\} < 1$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Media armonică a numerelor reale pozitive nenule $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

Media geometrică a numerelor reale pozitive $a_1, a_2 \ldots a_n$ este $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Inegalitatea mediilor. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ și $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}_+^*$; avem

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Modulul (valoarea absolută) a numărului real a, este $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

Ecuații

Ecuația de forma $ax + b = 0$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ are soluția unică $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, are:

- două soluții reale $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- o soluție reală $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
- nici o soluție reală dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;

Descompunerea trinomului $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ în produs
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Relațiile lui Viète. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0, \Delta \geqslant 0)$. Notăm: $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 \cdot x_2$. Atunci $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ și $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Formarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ când se cunosc soluțiile sale
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$. Atunci x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - Sx + P = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de logică matematică

Fie propozițiile p și q. Avem următoarele tabele de adevăr pentru ...

negație

p	$\neg p$
0	1
1	0

conjuncție

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

disjuncție

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

implicație

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

echivalență

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Legea dublei negații: $\neg\neg p \leftrightarrow p$

Legea terțului exclus: propoziția $p \vee \neg p$ este adevărată.

Metoda reducerii la absurd. Fie p, q propoziții. Avem $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Mulțimi

Fie A, B mulțimi incluse într-o mulțime *de referință* (numită și *totală*) T.

Complementara mulțimii A este mulțimea notată $\overline{A}$ (sau $C_T A$, sau CA), formată din elementele lui T care nu aparțin lui A. $\overline{A} = \{x \mid x \in T, x \notin A\}$.

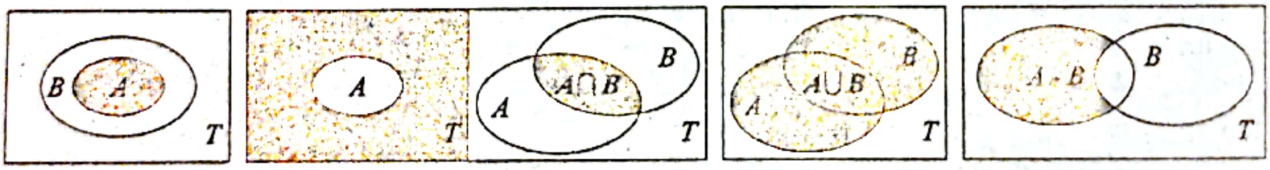
Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cap B$ formată din elementele lui T care aparțin lui A și B. $A \cap B = \{x \mid x \in T, x \in A \wedge x \in B\}$.

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea notată $A \cup B$ formată cu elementele lui T care aparțin sau lui A, sau lui B. $A \cup B = \{x \mid x \in T, x \in A \vee x \in B\}$.

Notăm cu $|A|$ numărul de elemente ale mulțimii A.

Fie mulțimile A și B. Atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Diferența mulțimilor A și B este mulțimea notată $A - B$, formată din elementele lui T care aparțin lui A și nu aparțin lui B. $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. .



Numim *produs cartezian al mulțimilor A și B* mulțimea notată $A \times B$ a perechilor cu primul element din A și al doilea din B. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Produsul cartezian a n mulțimi $A_1, A_2, \ldots A_n$ este mulțimea

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\}$.

Principiul inducției

Fie propozițiile $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$. Dacă p_0 este adevărată și „$\forall k \in \mathbb{N}, p_k \to p_{k+1}$" este adevărată, atunci „$\forall n \in \mathbb{N}, p_n$" este propoziție adevărată.

Formule care pot fi demonstrate prin inducție

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcții

Funcția afină

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție afină definită prin relația $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Funcția f este strict crescătoare, dacă $a>0$ și este strict descrescătoare, dacă $a<0$.

Funcția f este constantă, dacă $a=0$.

Dacă $a>0$, atunci $f<0$ pe intervalul $(-\infty,-\frac{b}{a})$ și $f>0$ pe intervalul $(-\frac{b}{a},\infty)$.

Dacă $a<0$, atunci $f>0$ pe intervalul $(-\infty,-\frac{b}{a})$ și $f<0$ pe intervalul $(-\frac{b}{a},\infty)$.

O dreaptă de ecuație $y=ax+b$ separă planul în două semiplane disjuncte:

I. Semiplanul aflat deasupra dreptei d, adică $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y>ax+b\}$;

II. Semiplanul aflat sub dreapta d, adică $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y<ax+b\}$.

Funcția de gradul II

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

semnul lui a	I	semn $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$	monotonia funcției f pe intervalul I	tabelul monotoniei funcției f pe $\mathbb{R}$
+	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$	−	descrescătoare	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $f(x)$: ↘ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↗
+	$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	+	crescătoare	
−	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$	+	crescătoare	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $f(x)$: ↗ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↘
−	$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	−	descrescătoare	

Dacă $a>0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ este minimul funcției. Punctul $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este situat „cel mai jos" pe graficul lui f. Dacă $a<0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ este maximul funcției. Punctul $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este situat „cel mai sus" pe graficul lui f.

Operații cu funcții.

Fie f, g două funcții reale definite pe același domeniu de definiție, D.

$f+g:D\to\mathbb{R}$, $x\xrightarrow{f+g}f(x)+g(x)$ se numește *funcția sumă* a lui f și g;

$f\cdot g:D\to\mathbb{R}$, $x\xrightarrow{f\cdot g}f(x)\cdot g(x)$ se numește *funcția produs* a lui f și g;

$\frac{f}{g}:D\to\mathbb{R}$, cu $g(x)\neq 0$, $\forall x\in D$, $x\xrightarrow{\frac{f}{g}}\frac{f(x)}{g(x)}$ se numește *funcția cât*.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

Fie funcțiile $f : A \to B$ și $g: B \to C$. Funcția $g \circ f : A \to C$, definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se numește *compusa lui f cu g*.

Fie funcția $f: A \to B$, $y = f(x)$. Funcția $g: B \to A$ cu proprietatea $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in A$ și $(f \circ g)(y) = y$, $\forall y \in B$, se numește *inversa funcției f* și se notează f^{-1}.

Relații metrice în plan și în spațiu

Fie ΔABC cu laturile a, b, c și h_a înălțimea coborâtă din vârful A pe latura opusă a.

Teorema sinusurilor. Fie R raza cercului circumscris ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Teorema cosinusului. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Formula lui Heron. Notăm $p = \frac{a+b+c}{2}$. Aria ΔABC este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Aria ΔABC este $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \frac{abc}{4R} = rp$, unde r este raza cercului înscris.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a, M_3
Calcul numeric și elemente de matematici financiare

Dacă $p\%$, $p \neq 0$, dintr-un număr x este b $\left(\text{adică } \frac{p}{100} \cdot x = b\right)$ atunci $x = \frac{100 \cdot b}{p}$.

Dobânda simplă (*nominală*) este dobânda calculată asupra sumei depuse (deci fixe) pe toată perioada depunerii (se notează cu D).

Procentul (*procentul dobânzii*) este dobânda care se plătește pentru suma de 100 lei (100 unități monetare) pe timp de un an.

Dobândă unitară este dobânda calculată pentru suma de 1 leu (o unitate monetară) pe timp de un an și este egală cu a suta parte din procent (se notează cu i).

Dacă notăm, ...
S_0 = suma depusă sau împrumutată inițial pentru care se calculează dobânda
t = durata pentru care se calculează dobânda (exprimată în ani)
p = procentul
S (sau S_t) = suma ridicată după t ani

... atunci avem:

dobânda unitară: $i = \frac{p}{100}$

dobânda simplă: $D = S_t - S_0$

dobânda produsă de S_0 pe t ani:

$D = itS_0 = \frac{S_0 pt}{100}$

O sumă este plasată cu dobândă compusă dacă, la sfârșitul perioadei, se adaugă dobânda simplă a acestei perioade la suma respectivă pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare și așa mai departe.

O sumă S_0, depusă cu un procent de dobândă p, produce într-un an o dobândă $D = \frac{S_0 p}{100}$.

În al doilea an, suma înscrisă în cont va fi $S_1 = S_0 + S_0 \frac{p}{100} = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 u$,

unde $u = 1 + \frac{p}{100}$ (*factor de fructificare*) sau $u = 1 + i$ (i fiind dobânda unitară).

Actualizarea este operația inversă fructificării. *Factorul de actualizare* este $v = (1 + i)^{-1}$.

Taxa pe valoarea adăugată se calculează prin aplicarea cotei de impozitare (în România de 19%) asupra prețului de vânzare din stadiul respectiv, obținându-se în acest fel taxa asupra prețului de vânzare din care se deduce taxa aferentă prețului de vânzare din stadiul anterior pentru a evita impunerea repetată a aceleiași valori.

Mărimea profitului, variabilă în timp și spațiu, este pusă în evidență cu ajutorul indicatorilor:

♦ *masa profitului*: se definește ca diferența între venituri și cheltuieli;

♦ *rata profitului*: se calculează fie ca raport procentual între masa profitului P și volumul capitalului C folosit, fie ca raport procentual între masa profitului P și cifra de afaceri CA sau ca raport procentual între masa profitului P și costul total CT (acesta reprezentând de fapt rata rentabilității):

Scanned with OKEN Scanner

Rata profitului $R_p = \frac{P}{C} \cdot 100$ sau $R_p = \frac{P}{CA} \cdot 100$;

Rata rentabilității $R_p = \frac{P}{CT}$ (se mai notează cu R_r).

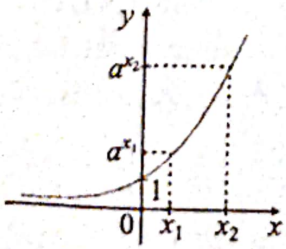
Funcții

Fie mulțimile reale A și B și o funcție $f: A \to B$.

- f se numește *crescătoare* dacă $\forall\, x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f se numește *strict crescătoare* dacă $\forall\, x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$.
- f se numește *descrescătoare* dacă $\forall\, x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f se numește *strict descrescătoare* dacă $\forall\, x_1, x_2 \in A$, din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) > f(x_2)$.
- f este crescătoare dacă și numai dacă, pentru orice $x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0$
- f este strict crescătoare dacă și numai dacă, $\forall\, x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$
- f este descrescătoare dacă și numai dacă, $\forall\, x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0$
- f este strict descrescătoare dacă și numai dacă, $\forall\, x_1 \neq x_2$ din A, avem $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$
- O funcție $f: A \to B$ este *injectivă* dacă îndeplinește una dintre condițiile echivalente:
  a) $\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
  b) $\forall y \in B$, există cel mult un element $x \in A$, astfel încât $y = f(x)$.
- O funcție $f: A \to B$ se numește *surjectivă* dacă $\forall y \in B, \exists x \in A$ astfel încât $y = f(x)$.
- O funcție $f: A \to B$ se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.
- Funcția $f: A \to B$ este *inversabilă* dacă există funcția $g: B \to A$ cu $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.
- O funcție $f: A \to B$ este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.
- Dacă $f: A \to B$ este o funcție numerică inversabilă, graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare ($y = x$).

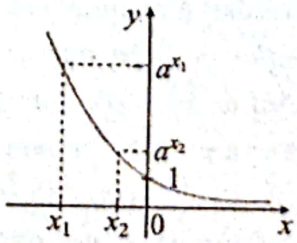
Funcția exponențială este funcția $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$; a se numește bază; a^x se numește putere.

- Pentru $a > 1$ graficul funcției exponențiale are forma:



- Pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$.

Pentru $0 < a < 1$ graficul funcției exponențiale are forma:

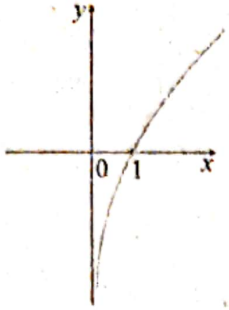


- Pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.
- Graficul funcției exponențiale trece prin punctul (0, 1), adică $a^0 = 1$, $\forall a > 0, a \neq 1$.
- Funcția exponențială este bijectivă, deci e inversabilă. Inversa ei este ...

Scanned with OKEN Scanner

Funcția logaritmică : $x \mapsto \log_a x$, $x \in (0,\infty)$, a se numește bază. $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

♦ Pentru $a > 1$ graficul funcției logaritmice are forma:



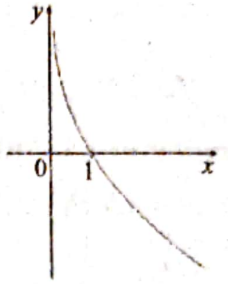
Funcția logaritmică este strict crescătoare:

$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	|	−	0	+	

;

Pentru $0 < a < 1$ graficul funcției logaritmice are forma:



Funcția logaritmică este strict descrescătoare:

$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	|	+	0	−	

♦ Graficul funcției logaritmice trece prin punctul $(1, 0)$, adică $\log_a 1 = 0$, $\forall a > 0, a \neq 1$.

♦ $\log_a x = z \Leftrightarrow x = a^z$ $\forall a > 0, a \neq 1, x \in (0,\infty)$ și $z \in \mathbb{R}$.

♦ Dacă $a, b \in (0,+\infty) - \{1\}$, $x, y \in (0,+\infty)$ și $z \in \mathbb{R}$, atunci: $a^{\log_a x} = x$; $\log_a a^z = z$;

$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a b^z = z \cdot \log_a b$; $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Elemente de combinatorică

Fie n și p două numere naturale nenule. Numărul de șiruri cu p elemente aparținând unei mulțimi cu n elemente este n^p.

Fie E și F două mulțimi nevide. Dacă Card $E = p$ și Card $F = n$, atunci numărul funcțiilor definite pe E cu valori în mulțimea F este n^p.

♦ Prin convenție, $0! = 1$;

♦ Notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $n \geq 1$.

Fie E o mulțime nevidă cu n elemente.

1. Există n^p șiruri cu p elemente din mulțimea E.
2. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte p, $0 \leq p \leq n$, este A_n^p, unde:

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ sau $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

3. Numărul permutărilor de n elemente este $P_n = n!$
4. Combinări de n elemente luate câte p, $0 \leq p \leq n$, este $C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

♦ Formula combinărilor complementare: $C_n^p = C_n^{n-p}$

♦ Formula de descompunere a combinărilor: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 1

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30p)

Se consideră mulțimea $A=\{1, 2,..., 7\}$.

(3p) **1.** Câte submulțimi cu număr impar de elemente are mulțimea A?

(3p) **2.** Care este media aritmetică a elementelor mulțimii A?

(3p) **3.** Câte submulțimi cu două elemente are mulțimea A?

(3p) **4.** Care este media geometrică a elementelor pare din mulțimea A?

(3p) **5.** Care este numărul de elemente raționale din mulțimea $\{\sqrt{x} \mid x\in A\}$?

Un triunghi ABC dreptunghic are catetele cu lungimile de 6 și 8.

(3p) **6.**Cât este lungimea ipotenuzei?

(3p) **7.** Care este aria triunghiului?

(3p) **8.** Care este lungimea înălțimii care cade pe ipotenuză?

(3p) **9.** Care este perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

(3p) **10.** Care este aria triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20p)

Se consideră numerele $\frac{1}{13}=0,a_1a_2a_3....a_n...$ și $\sqrt{2}=1,b_1b_2b_3$.

(3p) a) Să se calculeze $a_1 + a_2$.

(3p) b) Să se calculeze $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2003}$.

(3p) c) Să se determine cifra a_{2003}.

(3p) d) Să se calculeze $a_1 + a_2 + ... + a_{2003}$.

(3p) e) Să se calculeze $b_1 + b_2 + b_3$.

(3p) f) Să se calculeze $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20p)

Se consideră în plan o mulțime M formată din 10 puncte cu proprietatea că oricare trei dintre ele sunt necoliniare.

(4p) a) Să se determine numărul dreptelor care trec prin câte 2 puncte din mulțimea M

(4p) b) Să se calculeze câte triunghiuri pot avea vârfurile în mulțimea M.

(3p) c) Să se arate că dacă un triunghi are cel puțin două axe de simetrie, atunci acesta este echilateral.

(3p) d) Să se determine numărul axelor de simetrie pe care le are un pătrat.

(3p) e) Să se arate că printre dreptele care se pot duce unind câte două puncte din mulțimea M, există două care fac între ele un unghi mai mic sau egal decât 4°.

(3p) f) Să se demonstreze că printre dreptele care se pot duce unind câte două puncte din mulțimea M, există două care fac unghi mai mare sau egal decât 4°.

Subiectul IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu soluțiile ecuației $f(x)=0$.

(4p) a) Să se calculeze $f(0)$.

(3p) b) Să se calculeze x_1+x_2.

(3p) c) Să se calculeze x_1x_2.

(3p) d) Să se rezolve inecuația $f(x)<0$.

(4p) e) Să se calculeze produsul $f(0)f(1)...f(2003)$.

(3p) f) Să se găsească un element $a \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, pentru care $f(a)\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 2

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30 p)

(3p) **1.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, ..., 6\}$ conțin mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **2.** Care este suma tuturor elementelor din toate submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$?

(3p) **3.** Cât este C_7^2?

(3p) **4.** Câte numere de 4 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **5.** În câte moduri putem permuta elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$?

Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 5$, $AC = 12$ și $BC = 13$.

(3p) **6.** Cât este $BC^2 - AB^2 - AC^2$?

(3p) **7.** Care este măsura unghiului A?

(3p) **8.** Care este aria triunghiului ABC?

(3p) **9.** Care este lungimea înălțimii din vârful A?

(3p) **10.** Care este lungimea medianei din vârful A?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20 p)

Se consideră $A = \{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$.

(4p) a) Să se calculeze expresia $(x + 1)^2 - x^2$.

(4p) b) Să se arate că mulțimea A conține toate numerele întregi impare.

(2p) c) Să se arate că $2 \notin A$.

(4p) d) Să se verifice identitatea $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$, $\forall\, a, b, c, d \in \mathbf{Z}$.

(4p) e) Să se arate că dacă $p, q \in A$, atunci $pq \in A$.

(2p) f) Să se arate că $2004 \in A$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

S consideră într-un plan dreptele paralele d și e. Pe dreapta d se consideră punctele A_1, A_2, A_3, iar pe dreapta e se consideră punctele B_1, B_2, B_3 astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = B_1B_2 = B_2B_3 = A_1B_1 = 1$ și $A_1B_1 \perp d$, $A_2B_2 \perp d$.

(4p) a) Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_3B_1$.

(4p) b) Câte drepte au cel puțin câte 2 puncte în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$?

(4p) c) Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$.

(4p) d) Să se determine numărul de patrulatere care au toare vârfurile în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$.

(4p) e) Să se determine numărul de dreptunghiuri care au toate vârfurile în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

(4p) a) Să se determine x_1 și x_2.

(4p) b) Să se găsească $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $f(a) \in \mathbb{N}$.

(4p) c) Să se arate că $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$ și $x_1x_2 \in \mathbb{Z}$.

(4p) d) Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{Z}$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2p) f) Să se arate că expresia $x_1^5 + x_2^5 - x_1 - x_2$ este un număr întreg care se divide cu 5.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 3

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30 p)

(3p) **1.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, .., 5\}$ conțin elementul 1?

(3p) **2.** Care este suma elementelor din toate submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 9\}$?

(3p) **3.** Cât este C_6^3?

(3p) **4.** Câte numere de 4 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **5.** În câte moduri putem permuta elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$?

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC care are catetele de 10 și 24.

(3p) **6.** Care este lungimea ipotenuzei?

(3p) **7.** Care este lungimea medianei care cade pe ipotenuză?

(3p) **8.** Care este lungimea înălțimii care cade pe ipotenuză?

(3p) **9.** Care este aria triunghiului ABC?

(3p) **10.** Care este perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20 p)

Se consideră $A=\{k+\sqrt{n}\,|\,k\in\mathbf{Z}, n\in\mathbb{N}\}$.

(4p) a) Să se verifice că $\mathbf{Z}\subset A$.

(4p) b) Să se verifice că $\sqrt{2}-1\in A$.

(4p) c) Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$

(4p) d) Să se arate că dacă $r\in\mathbb{Q}\cap A$, atunci $r\in\mathbf{Z}$.

(4p) e) Să se găsească un element în mulțimea $A\cap(0;\ 0{,}1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

Se consideră în plan o mulțime M formată din 5 puncte. Notăm cu $n(M)$ numărul dreptelor ce trec prin cel puțin câte 2 puncte ale mulțimii M.

(2p) a) Să se verifice că $n(M) \geq 1$.

(2p) b) Să se arate că $n(M) \leq 10$.

(4p) c) Să se găsească o mulțime S formată din 5 puncte din plan, pentru care $n(S) = 10$.

(4p) d) Să se arate că $n(M) \neq 9$.

(4p) e) Să se găsească o mulțime T formată din 5 puncte din plan, pentru care $n(T) = 1$.

(4p) f) Dacă E este o mulțime din plan formată din 5 puncte și $n(E) \neq 1$, să se arate că $n(E) \geq 5$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

(4p) a) Să se determine x_1 și x_2.

(4p) b) Să se găsească $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, astfel încât $f(a) \in \mathbb{N}$.

(4p) c) Să se arate că $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$ și $x_1 x_2 \in \mathbb{Z}$.

(4p) d) Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{Z}$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2p) f) Să se arate că numărul întreg $x_1^5 + x_2^5 - x_1 - x_2$ se divide cu 5.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 4

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30 p)

(3p) **1.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, conțin mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **2.** Câte elemente din mulțimea $\{1, 2, ..., 30\}$ se divid cu 2 sau cu 3?

(3p) **3.** Cât este C_7^5?

(3p) **4.** Câte numere de 4 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{2, 3\}$?

(3p) **5.** În câte moduri putem permuta elementele mulțimii $\{a, b, c\}$?

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC care are catetele de 12 și 35.

(3p) **6.** Care este lungimea ipotenuzei?

(3p) **7.** Care este lungimea medianei care cade pe ipotenuză?

(3p) **8.** Care este lungimea înălțimii care cade pe ipotenuză?

(3p) **9.** Care este aria triunghiului ABC?

(3p) **10.** Care este perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20 p)

Spunem că o mulțime nevidă și finită de numere naturale distincte și nenule este „interesantă" dacă orice submulțime nevidă a sa are media aritmetică a elementelor număr natural.

(4p) a) Să se verifice că mulțimea $A = \{2, 4, 6\}$ este „interesantă".

(4p) b) Să se găsească o mulțime „interesantă" care are 4 elemente.

(4p) c) Să se găsească o mulțime de 5 elemente, care nu este „interesantă".

(4p) d) Să se arate că nu există o mulțime „interesantă" cu 4 elemente, care conține mulțimea $\{2, 4, 6\}$.

(4p) e) Să se găsească o mulțime „interesantă" cu 2004 elemente.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

Se consideră în plan o mulțime M formată din 6 puncte. Notăm cu $n(M)$ numărul dreptelor ce trec prin cel puțin câte 2 puncte ale mulțimii M.

(4p) a) Să se verifice că $n(M) \geq 1$.

(4p) b) Să se arate că $n(M) \leq 15$.

(4p) c) Să se găsească o mulțime S formată din 6 puncte din plan, pentru care $n(S) = 15$.

(2p) d) Să se arate că $n(M) \neq 14$.

(4p) e) Să se găsească o mulțime T formată din 6 puncte dn plan, pentru care $n(T) = 1$.

(2p) f) Dacă E este o mulțime din plan formată din 6 puncte și $n(E) \neq 1$, să se arate că $n(E) \geq 6$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră mulțimea $A = \{4p + 5q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$.

(4p) a) Să se arate că $12 \in A$ și $13 \in A$.

(4p) b) Să se arate că $14 \in A$ și $15 \in A$.

(4p) c) Să se arate că $11 \notin A$.

(4p) d) Să se arate că $n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$.

(2p) e) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii $\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$.

(2p) f) Să se determine suma elementelor mulțimii $\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 5

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30 p)

(3p) **1.** Care este suma primelor două zecimale ale numărului $\sqrt{5}$?

(3p) **2.** Care este suma tuturor elementelor din toate submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$?

(3p) **3.** Cât este C_7^2?

(3p) **4.** Câte numere de trei cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **5.** Câte soluții reale are ecuația $4^x = 2^x$?

Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 21$, $AC = 20$ și $BC = 29$.

(3p) **6.** Cât este $BC^2 - AB^2 - AC^2$?

(3p) **7.** Care este măsura unghiului A?

(3p) **8.** Care este aria triunghiului ABC?

(3p) **9.** Care este lungimea înălțimii din vârful A?

(3p) **10.** Care este lungimea medianei din vârful A?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20 p)

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

(4p) a) Să se verifice că $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) b) Să se calculeze S_5.

(4p) c) Să se arate că $S_n = \frac{n}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) d) Să se găsească cel mai mare număr natural nenul n, cu proprietatea că $S_n < \frac{11}{12}$.

(4p) e) Să se găsească cel mai mic număr natural nenul n, cu proprietatea că $S_n > \frac{111}{112}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

Se consideră într-un plan dreptele paralele d și e. Pe dreapta d se consideră punctele distincte A_1, A_2, A_3, iar pe dreapta e se consideră punctele distincte B_1, B_2, B_3 astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = B_1B_2 = B_2B_3 = A_1B_1 = 1$ și $A_1B_1 \perp d$, $A_2B_2 \perp d$.

(4p) a) Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_3B_1$.

(4p) b) Câte drepte trec prin cel puțin câte două puncte din mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, A_3, B_3\}$?

(4p) c) Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$.

(4p) d) Să se determine numărul de patrulatere care au toate vârfurile în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$.

(4p) e) Să se determine numărul de dreptunghiuri care au toate vârfurile în mulțimea $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3\}$.

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$, cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, iar $S_0 = 2$.

(4p) a) Să se determine x_1 și x_2.

(4p) b) Să se verifice că $x_1^{n+2} = 2x_1^{n+1} + 5x_1^n$ și $x_2^{n+2} = 2x_2^{n+1} + 5x_2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(4p) c) Să se arate că $S_{n+2} = 2S_{n+1} + 5S_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(4p) d) Să se calculeze $x_1 + x_2$.

(2p) e) Să se calculeze $x_1^5 + x_2^5$.

(2p) f) Să se găsească două numere întregi b și c astfel încât ecuația $x^2 + bx + c = 0$ să aibă o rădăcină în intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 6

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30 p)

(3p) **1.** Care este suma primelor două zecimale ale numărului $\sqrt{2}$?

(3p) **2.** Care este suma tuturor elementelor din toate submulțimile nevide ale mulțimii $\{2, 3, 5\}$?

(3p) **3.** Cât este C_6^2?

(3p) **4.** Câte elemente are mulțimea $\{1, 3, 5, ..., 29\}$?

(3p) **5.** Câte soluții are ecuația $2^x + 1 = 0$?

Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 8$, $AC = 15$ și $BC = 17$.

(3p) **6.** Cât este $BC^2 - AB^2 - AC^2$?

(3p) **7.** Care este măsura unghiului A?

(3p) **8.** Care este aria triunghiului ABC?

(3p) **9.** Care este lungimea înălțimii din vârful A?

(3p) **10.** Care este lungimea medianei din vârful A?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20 p)

Se consideră mulțimea $A = \{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

(4p) a) Să se calculeze expesia $(x + 1)^2 - x^2$.

(4p) b) Să se arate că mulțimea A conține toate numerele întregi impare.

(2p) c) Să se arate că $2 \notin A$.

(4p) d) Să se verifice identitatea $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$, $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(4p) e) Să se arate că, dacă $p, q \in A$, atunci $p \cdot q \in A$.

(2p) f) Să se arate că $2004 \in A$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

Se consideră un hexagon convex (poligon convex cu 6 laturi).

(4p) a) Care este numărul de drepte care trec prin câte două vârfuri ale hexagonului?

(4p) b) Să se afle numărul de diagonale ale hexagonului.

(4p) c) Să se calculeze suma unghiurilor hexagonului.

(4p) d) Să se calculeze media aritmetică a unghiurilor hexagonului.

(2p) e) Câte triunghiuri care să aibă toate vârfurile printre cele ale hexagonului există?

(2p) f) Câte patrulatere care să aibă toate vârfurile printre cele ale hexagonului există?

Subiectul IV (20 p)

Se consideră mulțimea de funcții $M = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 + ax + b, a, b \in \{1, 2, 3\}\}$ și notăm cu S mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuațiilor de forma $f(x) = 0$, unde f este o funcție din mulțimea M.

(4p) a) Să se determine numărul de funcții din mulțimea M.

(4p) b) Să se determine numărul de funcții f din mulțimea M pentru care ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale.

(4p) c) Să se determine numărul de funcții f din mulțimea M, $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \{1, 2, 3\}$, care verifică relația $a^2 = 4b$.

(4p) d) Găsiți două funcții f și g din mulțimea M, pentru care ecuațiile $f(x) = 0$ și $g(x) = 0$ au o soluție reală comună.

(2p) e) Să se calculeze numărul de elemente ale mulțimii S.

(În cazul în care o soluție apare de mai multe ori, se consideră ca fiind un singur element al mulțimii S).

(2p) f) Să se calculeze suma elementelor mulțimii S.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 7

♦ *Pentru întrebările 1-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen*

Subiectul I (30 p)

(3p) **1.** Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, .., 6\}$ conțin mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **2.** Care este suma tuturor elementelor din toate submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$?

(3p) **3.** Cât este C_7^2?

(3p) **4.** Câte numere de 4 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{1, 2\}$?

(3p) **5.** În câte moduri putem permuta elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$?

Se consideră triunghiul ABC, în care $AB = 5$, $AC = 12$ și $BC = 13$.

(3p) **6.** Cât este $BC^2 - AB^2 - AC^2$?

(3p) **7.** Care este măsura unghiului A?

(3p) **8.** Care este aria triunghiului ABC?

(3p) **9.** Care este lungimea înălțimii din vârful A?

(3p) **10.** Care este lungimea medianei din vârful A?

♦ *Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete*

Subiectul II (20 p)

Se consideră numerele $\frac{1}{21} = 0, a_1 a_2 ... a_n ...$ și $\sqrt{3} = 1, b_1 b_2 ... b_n ...$

(4p) a) Să se calculeze $a_1 + a_2$.

(4p) b) Să se determine cifra a_{2004}.

(4p) c) Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2004}$.

(4p) d) Să se calculeze suma $a_1 + a_2 + ... + a_{2004}$.

(2p) e) Să se calculeze $b_1 + b_2$.

(2p) f) Să se calculeze $b_1 \cdot b_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III (20 p)

Se consideră un poligon convex P, care are 7 laturi.

(4p) a) Care este numărul de drepte care trec prin câte două vârfuri ale poligonului P?

(4p) b) Să se afle numărul de diagonale ale poligonului P.

(4p) c) Să se calculeze suma unghiurilor poligonului P.

(4p) d) Să se calculeze media aritmetică a unghiurilor poligonului P.

(2p) e) Câte triunghiuri care să aibă toate vârfurile printre cele ale poligonului P există?

(2p) f) Câte patrulatere care să aibă toate vârfurile printre cele ale poligonului P există?

Subiectul IV (20 p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 7$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$, cu $S_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $S_0 = 2$.

(4p) a) Să se determine x_1 și x_2.

(4p) b) Să se verifice că $x_1^{n+2} = 2x_1^{n+1} + 7x_1^n$ și $x_2^{n+2} = 2x_2^{n+1} + 7x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(4p) c) Să se arate că $S_{n+2} = 2S_{n+1} + 7S_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(4p) d) Să se calculeze $x_1 + x_2$.

(2p) e) Să se calculeze $x_1^5 + x_2^5$.

(2p) f) Să se găsească două numere întregi b și c astfel încât ecuația $x^2 + bx + c = 0$ să aibă o rădăcină în intervalul $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvările testelor

M_3 – varianta 1

Subiectul I

1. A are: 7 submulțimi cu câte un element, $C_7^3 = 35$ de submulțimi cu câte 3 elemente, $C_7^5 = 21$ de submulțimi cu câte 5 elemente și o submulțime cu număr impar de elemente.

2. Media aritmetică a elementelor mulțimii A este $\frac{1+2+...+7}{7} = \frac{\frac{7(7+1)}{2}}{7} = 4$.

3. A are $C_7^2 = 21$ de submulțimi cu două elemente.

4. Media geometrică a elementelor pare din A este $\sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$.

5. Cum $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ doar pentru $x = 1$ și $x = 4$, $x \in A$, rezultă că numărul de elemente este 2.

6. Ipotenuza este $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

7. Aria triunghiului este $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

8. Lungimea înălțimii care cade pe ipotenuză este $\frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ cm.

9. Perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC este egal cu jumătate din perimetrul triunghiului ABC, adică este egal cu 12.

10. Aria triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC este egală cu un sfert din aria triunghiului ABC, adică este egală cu 6.

Subiectul II

a) $a_1 + a_2 = 0 + 7 = 7$.

b) $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2003} = 0$ deoarece $a_1 = 0$.

c) Numărul $\frac{1}{13}$ este periodic având perioada din 6 cifre 076923, rezultă că vom avea 333 de perioade întregi iar cifra a_{2003} este a cincea cifră din perioadă, adică 2.

d) suma căutată este $333 \cdot 27 + 24 = 9015$.

e) Cum $\sqrt{2} = 1{,}414...$ avem $b_1 + b_2 + b_3 = 9$.

f) Avem $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 16$.

Subiectul III

a) Numărul dreptelor care trec prin câte două puncte din mulțimea M este $C_{10}^2 = 45$.

b) Numărul triunghiurilor care pot avea vârfurile în mulțimea M este $C_{10}^3 = 120$.

c) Cum o axă de simetrie trece printr-un vârf, vom avea că triunghiul cu o axă de

Scanned with OKEN Scanner

simetrie este isoscel. Rezultă că dacă are două axe de simetrie este echilateral.

d) Sunt două axe de simetrie care trec prin vârfuri și două axe de simetrie care trec prin mijloacele a două laturi opuse. Deci au 4 axe de simetrie.

e) Printr-un punct oarecare al planului ducem paralele la cele 45 de drepte. Vom obține 90 de unghiuri ce se formează între acestea. Dacă toate ar fi mai mari decât 4°, am avea suma lor mai mare decât 360°, fals. Deci există un unghi cu măsura $\leqslant 4°$.

f) Procedăm analog ca la e) și rezultă că există un unghi cu măsura $\geqslant 4°$.

Subiectul IV

a) $f(0) = 2$.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3$, conform relațiilor lui Viète.

c) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2$, conform relațiilor lui Viète.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\} = (1; 2)$ – se folosește semnul funcției de gradul II.

e) $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(2003) = 0$ deoarece $f(1) = 0$.

f) Ecuația $f(x) = 3$ devine $x^2 - 3x - 1 = 0$ care are o soluție $a = \frac{3+\sqrt{14}}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Deci $f(a) = 3 \in \mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 2

Subiectul I

1. Sunt 16 submulțimi.

2. Suma este 80.

3. $C_7^2 = 21$..

4. Sunt 16 numere.

5. Sunt 24 de permutări.

6. $BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0$.

7. $\hat{A} = 90°$.

8. $S_{ABC} = 30$.

9. $h_a = \frac{60}{13}$.

10. $m_a = \frac{13}{2}$.

Subiectul II

a) $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$.

b) $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2 \in A$.

c) Dacă $2 \in A$, atunci $x^2 - y^2 = 2$ sau $(x + y)(x - y) = 2$, de unde rezultă că $x - y$ și $x + y$ au parități diferite, fals.

d) Se verifică prin calcul direct.

e) Fie $p = a^2 - b^2$ și $q = c^2 - d^2$; atunci $pq = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$, deci $pq \in A$.

f) $2004 = 502^2 - 500^2 \in A$.

Subiectul III

a) $S_{A_1A_2B_1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

b) Sunt 2 drepte de tip A_iA_j și B_iB_j și 9 drepte de tip A_iB_j, deci 11 drepte.

c) Sunt $C_3^1C_3^2 = 9$ triunghiuri de tip $A_iA_jB_k$ și tot atâtea de tip $A_iB_jB_k$, deci 18 triunghiuri în total.

d) Sunt $C_{\#3}^2 \cdot C_3^2 = 9$ patrulatere.

e) Sunt $C_3^2 = 3$ dreptunghiuri.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV

a) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

b) $f(1+\sqrt{2})=0$ iar $1+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

c) $x_1+x_2=2$ și $x_1x_2=-1$.

d) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\in\mathbb{Z}$.

e) Pentru $n=0$, $n=1$ și $n=2$ s-a verificat.

Arătăm acum că $P_n\Rightarrow P_{n+1}$.

$x_1^{n+1}+x_2^{n+1}=2x_1^n+x_1^{n-1}+2x_2^n+x_2^{n-1}=2(x_1^n+x_2^n)+(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})\in\mathbb{Z}$, deci proprietatea este adevărată.

f) $x_1^3=2x_1^2+x_1=2(2x_1+1)+x_1=5x_1+2$. Apoi

$x_1^4=5x_1^2+2x_1=5(2x_1+1)+2x_1=12x_1+5$ și $x_1^5=12x_1^2+5x_1=12(2x_1+1)+5x_1=29x_1+12$.

Deci $x_1^5+x_2^5-x_1-x_2=29x_1+12+29x_2+12-x_1-x_2=28(x_1+x_2)+24=28\cdot2+24=80\in\mathbb{Z}$.

Deci 5 divide $x_1^5+x_2^5-x_1-x_2$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 3

Subiectul I

1. Sunt 16 mulţimi.

2. Suma este 160.

3. $C_6^3 = 20$.

4. Sunt 16 numere.

5. Sunt 16 permutări.

6. $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

7. Mediana relativă la ipotenuză are lungimea 13.

8. Lungimea înălţimii relativă la ipotenuză este $\frac{1024}{26}$.

9. $S_{ABC} = 120$.

10. Perimetrul căutat este 30.

Subiectul II

a) $k + \sqrt{0} \in A$, deci $\mathbf{Z} \subset A$.

b) $k = -1$, $n = 2 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 \in A$.

c) Dacă $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$, atunci $\sqrt{2} + \sqrt{3} = k + \sqrt{n} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = k^2 + n + 2k\sqrt{n}$, sau $2\sqrt{6} - 2k\sqrt{n} = k^2 + n - 5$, sau $24 + 4k^2 n - 8k\sqrt{6n} \in \mathbb{Q}$, deci $8k\sqrt{6n} \in \mathbb{Q}$, adică $k = 0$ sau $n = 6r^2$.

$k = 0$ ne conduce la $5 + 2\sqrt{6} = n$, fals.

$n = 6r^2$ ne conduce la $\sqrt{6}(2 - 2rk) \in \mathbb{Q}$, adică $rk = 1$, sau $r = k = \pm 1$.

Dacă $r = k = 1$, avem $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{6}$, fals.

Dacă $r = k = -1$, atunci $\sqrt{2} + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{6}$, fals.

Deci $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin A$.

d) Dacă $r \in \mathbb{Q} \cap A$, atunci $r = k + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ sau $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, de unde rezultă $\sqrt{n} \in \mathbf{Z}$, deci $r \in \mathbf{Z}$.

e) Fie $x = \sqrt{101} - 10 = \frac{1}{10 + \sqrt{101}} < \frac{1}{10}$. Cum $0 < x < \frac{1}{10}$ şi $x \in A$, atunci $x \in A \cap (0; 0{,}1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul III

a) Evident.

b) Prin M trec cel mult $C_5^2 = 10$ drepte.

c) Vârfurile unui pentagon convex constituie mulțimea căutată.

d) Dacă $n(M) = 9$, rezultă că avem cel puțin 3 puncte coliniare și atunci $n(M) \leqslant 8$.

e) Mulțimea T este formată din 5 puncte coliniare.

f) Dacă $n(E) > 1$, atunci nu toate punctele sunt coliniare. Dacă 4 sunt coliniare și al cincilea nu este pe dreapta lor, $n(E) = 5$; dacă avem 3 coliniare și 2 nesituate pe dreapta lor, $n(E) > 5$, iar dacă nu avem coliniare, $n(E) = 10$. Deci $n(E) \geqslant 5$.

Subiectul IV

a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$.

b) $f(1+\sqrt{6}) = 0$.

c) $x_1 + x_2 = 2$ și $x_1 x_2 = -5$.

d) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \in \mathbf{Z}$.

e) Pentru $n = 0$, $n = 1$ și $n = 2$ s-a verificat. Apoi

$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = 2x_1^n + 5x_1^{n-1} + 2x_2^n + 5x_2^{n-1} = 2(x_1^n + x_2^n) + 5(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) \in \mathbf{Z}$.

f) Avem $x_1^2 = 2x_1 + 5$; $x_1^3 = 2x_1^2 + 5x_1 = 2(2x_1 + 5) + 5x_1 = 9x_1 + 10$;

$x_1^4 = 9x_1^2 + 10x_1 = 9(2x_1 + 5) + 10x_1 = 28x_1 + 45$; $x_1^5 = 28x_1^2 + 45x_1 =$

$= 28(2x_1 + 5) + 45x_1 = 101x_1 + 140$.

Deci $x_1^5 + x_2^5 - x_1 - x_2 = 100(x_1 + x_2) + 280 = 200 + 280 = 480 \in \mathbf{Z}$ și 5 divide $x_1^5 + x_2^5 - x_1 - x_2$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 4

Subiectul I

1. Sunt 8 submulţimi.

2. Sunt $15 + 10 - 5 = 20$ elemente.

3. $C_7^5 = 21$.

4. Sunt 16 numere.

5. Sunt 6 permutări.

6. $\sqrt{12^2 + 35^2} = 37$.

7. $\frac{37}{2}$.

8. $\frac{12 \cdot 35}{37}$.

9. 210.

10. 42.

Subiectul II

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $A = \{24, 48, 72, 96\}$.

c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

d) Dacă $A = \{2, 4, 6, x\}$, atunci din $\frac{2+4+x}{3} \in \mathbb{N}$, rezultă $3 \mid x$, iar din $\frac{2+6+x}{3} \in \mathbb{N}$ rezultă $3 \mid x + 2$, fals.

e) $A = \{2004!, 2 \cdot 2004!, .., 2004 \cdot 2004!\}$ verifică cerinţa.

Subiectul III

a) Evident.

b) Există maxim $C_6^2 = 15$ drepte, deci $n(M) \leqslant 15$.

c) Mulţimea S poate fi formată din vârfurile unui hexagon convex.

d) Dacă $n(M) < 15$, rezultă că avem cel puţin 3 puncte coliniare şi atunci $n(M) \leqslant 13$.

e) Mulţimea T poate fi formată din 6 puncte coliniare.

f) Dacă $n(E) \neq 1$, atunci nu toate cele 6 puncte sunt coliniare şi vom avea 5 puncte coliniare şi al şaselea nesituat pe dreapta lor. În acest caz $n(E) = 6$. Mai putem avea 4 puncte coliniare şi 2 nesituate pe dreapta lor etc. În fiecare situaţie $n(E) \geqslant 6$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV

a) $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$ și $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$, deci $12 \in A$ și $13 \in A$.

b) $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$ și $15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$, deci $14 \in A$ și $15 \in A$.

c) Dacă $4p + 5q = 11$, atunci $q \in \{0, 1, 2\}$; $q = 0$ conduce la $p = \frac{11}{4}$, fals; $q = 1$ conduce la $p = \frac{6}{4}$, fals, iar $q = 2$ conduce la $a = \frac{1}{4}$, fals. Deci $11 \notin A$.

d) Dacă $n \in A$, atunci $n = 4p + 5q$ și de aici $n + 4 = 4(p + 1) + 5q \in A$. Deci $P_n \Rightarrow P_{n+4}$ și cum P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15} sunt adevărate, rezultă că P_n este adevărată $\forall\, n \geqslant 12$.

e) $1 \notin A$, $2 \notin A$, $3 \notin A$, $6 \notin A$, $7 \notin A$, $11 \notin A$, deci mulțimea căutată este $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$.

f) Suma elementelor mulțimii este 30.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 5

Subiectul I (30 p)

1. Suma este 5.

2. Suma este 24.

3. $C_7^2 = 21$.

4. Sunt 8 numere.

5. Ecuația are o soluție reală.

6. Expresia este 0.

7. $\hat{A} = 90°$.

8. Aria este 210.

9. Lungimea înălțimii este $\frac{420}{29}$.

10. Lungimea medianei este 14,5.

Subiectul II (20 p)

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $S_5 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

c) $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

d) $S_n < \frac{11}{12}$, ne conduce la $\frac{n}{n+1} < \frac{11}{12}$ sau $12n < 11n + 11$ sau $n < 11$, deci $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Cel mai mare este 10.

e) $S_n > \frac{111}{112}$ sau $\frac{n}{n+1} > \frac{111}{112}$ sau $n > 111$, adică $n \in \{112, 113, \ldots\}$. Cel mai mic este 112.

Subiectul III (20 p)

a) Aria este $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

b) Sunt $1 + 1 + 9 = 11$ drepte.

c) Sunt $C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ triunghiuri.

d) Sunt $C_3^2 \cdot C_3^2 = 9$ patrulatere.

e) Sunt $C_3^2 = 3$ dreptunghiuri.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV (20 p)

a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$.

b) $x_1^{n+2} - 2x_1^{n+1} - 5x_1^n = x_1^n(x_1^2 - 2x_1 - 5) = 0$ și analog pentru x_2.

c) Adunând relațiile de la b), rezultă $S_{n+2} = 2S_{n+1} + 5S_n$.

d) $x_1 + x_2 = 2$.

e) $S_2 = 2S_1 + 5S_0 = 4 + 10 = 14$; $S_3 = 2S_2 + 5S_1 = 28 + 10 = 38$;
$S_4 = 2S_3 + 5S_2 = 76 + 70 = 146$; $S_5 = 2S_4 + 5S_3 = 292 + 190 = 482$.

f) Alegem b și c întregi astfel încât $1 + b + c < 0$ și $\frac{1}{4} + \frac{b}{2} + c > 0$ și în acest fel ecuația $x^2 + bx + c = 0$ are o rădăcină reală în intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Suntem conduși la inecuațiile $b + c < -1$ și $2b + 4c > -1$, care ne oferă printre alte soluții $b = -5$ și $c = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 6

Subiectul I (30 p)

1. Suma este 5.

2. Suma este 40.

3. $C_6^2 = 15$.

4. Numărul de elemente este 15.

5. Ecuaţia nu are soluţii reale.

6. Expresia este 0.

7. Unghiul are 90°.

8. Aria este 60.

9. Înălţimea este egală cu $\frac{120}{17}$.

10. Mediana este egală cu 8,5.

Subiectul II (20 p)

a) $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$.

b) Din a) rezultă că orice număr impar se află în A.

c) Presupunem că $2 \in A$; atunci există $x, y \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x^2 - y^2 = 2$ sau $(x-y)(x+y) = 2$. Dar, $x-y$ şi $x+y$ au aceeaşi paritate, deci $(x-y)(x+y) \neq 2$. Deci $2 \notin A$.

d) Se verifică prin calcul direct.

e) Dacă $p, q \in A$, atunci $p = a^2 - b^2$ şi $q = c^2 - d^2$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. De aici rezultă $p \cdot q = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$, deci $p \cdot q \in A$.

f) $2004 = 502^2 - 500^2$, deci $2004 \in A$.

Subiectul III (20 p)

a) Sunt $C_6^2 = 15$ drepte.

b) Sunt $15 - 6 = 9$ diagonale.

c) Suma unghiurilor este $180 \cdot (6 - 2) = 720°$.

d) Media aritmetică este $\frac{720°}{6} = 120°$.

e) Sunt $C_6^3 = 20$ de triunghiuri.

f) Sunt $C_6^4 = 15$ patrulatere.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul IV (20 p)

a) Sunt 9 funcții în mulțimea M.

b) Ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții dacă $\Delta < 0$ sau $a^2 < 4b$. Când $a = 1$, $b \in \{1, 2, 3\}$. Când $a = 2$, $b \in \{2, 3\}$, iar când $a = 3$, $b = 3$, deci sunt $3 + 2 + 1 = 6$ ecuații.

c) $a^2 = 4b$ are soluție doar dacă $a = 2$ și $b = 1$, deci o singură funcție din M are această proprietate.

d) De exemplu, $f = x^2 + 2x + 1$ și $g = x^2 + 3x + 2$ din M și au soluția comună $x = -1$.

e) Funcțiile din M care au soluții reale sunt $f = x^2 + 2x + 1$, $g = x^2 + 3x + 2$ și $h = x^2 + 3x + 1$. Deci mulțimea $S = \left\{-1, -2, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ are 4 elemente.

f) Suma elementelor mulțimii S este -6.

Scanned with OKEN Scanner

M3
Varianta 7

Subiectul I (30 p)

1. Sunt 16 submulțimi.

2. Suma este 80.

3. $C_7^2 = 21$.

4. Sunt 16 numere.

5. Numărul de permutări este 24.

6. Expresia este 0.

7. Unghiul are 90°.

8. Aria este 30.

9. Lungimea înălțimii este $\frac{60}{13}$.

10. Lungimea medianei este 6,5.

Subiectul II (20 p)

a) $\frac{1}{21} = 0,(047619)$, deci $a_1 + a_2 = 4$.

b) $a_{2004} = a_6 = 9$.

c) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2004} = 0$.

d) $a_1 + a_2 + .. + a_{2004} = 334(a_1 + \ldots + a_6) = 334 \cdot 27$.

e) $\sqrt{3} = 1,73..$, deci $b_1 + b_2 = 10$.

f) $b_1 \cdot b_2 = 21$.

Subiectul III (20 p)

a) Sunt $C_7^2 = 21$ de drepte.

b) Sunt 21 – 7 =14 diagonale.

c) Suma unghiurilor este $180°(7 - 2) = 900°$.

d) Media aritmetică este $\frac{900°}{7}$.

e) Sunt $C_7^3 = 35$ de triunghiuri.

f) Sunt $C_7^4 = 35$ de patrulatere.

Subiectul IV (20 p)

a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{8}$.

b) $x_1^{n+2} - 2x_1^{n+1} - 7x_1^n = x_1^n(x_1^2 - 2x_1 - 7) = 0$ și analog pentru x_2.

c) Adunând relațiile de la b), rezultă $S_{n+2} = 2S_{n+1} + 7S_n$.

Scanned with OKEN Scanner

d) $x_1 + x_2 = 2$.

e) $S_2 = 2S_1 + 7S_0 = 4 + 14 = 18$; $S_3 = 2S_2 + 7S_1 = 36 + 14 = 50$;
$S_4 = 2S_3 + 7S_2 = 100 + 126 = 226$; $S_5 = 2S_4 + 7S_3 = 452 + 350 = 802$.

f) Dorim ca $g(0) > 0$ și $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ unde $g = x^2 + bx + c$, adică $c > 0$ și $3b + 9c < -1$.
Dacă $c = 1$ și $b = -4$, se verifică cerința.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Calendarul şi Metodologia de organizare a examenului de bacalaureat 5

M_1

Programa şcolară 18
Programa de bacalaureat 26
Breviar teoretic 28
Modele de teste pentru bacalaureat 70
Rezolvările modelelor de teste 134

M_2

Programa şcolară 209
Programa de bacalaureat 215
Breviar teoretic 216
Modele de teste pentru bacalaureat 244
Rezolvările modelelor de teste 284

M_3

Programa şcolară 324
Programa de bacalaureat 328
Breviar teoretic 329
Modele de teste pentru bacalaureat 336
Rezolvările modelelor de teste 350

Scanned with OKEN Scanner

Pentru elaborarea lucrării s-au selectat materiale din următoarele surse:

Programa şcolară de matematică pentru clasa a IX-a aprobată prin Ordin al ministrului nr. 3371 din 02.03.1999, care include şi modificări la programă prin Ordin al ministrului educaţiei şi cercetării nr. 3915 din 31.05.2001

Programa şcolară de matematică pentru clasa a X-a aprobată prin Ordin al ministrului educaţiei naţionale nr. 5086 din 15.12.1999 şi modificată prin Ordin al ministrului educaţiei şi cercetării nr. 3915 din 31.05.2001

Programele şcolare de matematică pentru clasele a XI-a – a XII-a aprobate prin Ordin al ministrului educaţiei naţionale nr. 4923 din 18.10.2000 şi modificate prin Ordin al ministrului educaţiei şi cercetării nr. 3915 din 31.05.2001

Programa pentru examenul naţional de bacalaureat 2005

Metodologie de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat 2005 (anexa nr.2 la Ordinul M.E.C.T. nr. 4595 din 31.08. 2004, privind aprobarea Calendarului şi a Metodologiei de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat 2005)

Scanned with OKEN Scanner

„Deoarece structurile probelor de matematică la examenul de bacalaureat 2005 prezintă unele diferențe față de anul trecut - spre beneficiul candidaților - Serviciul Național de Evaluare și Examinare a solicitat cadrelor didactice propuneri privind conținutul subiectelor și a constituit un grup de profesori de matematică recunoscuți pentru competența lor profesională pe care i-a coordonat în vederea realizării unor modele de teste relevante. O parte a activității grupului este prezentată în această carte.

Testele sunt realizate pentru toate tipurile de programe de matematică (M1, M2 și M3) și, spre deosebire de alte culegeri, sunt însoțite de rezolvări complete. Acest fapt îl consider esențial deoarece la clasă elevul trebuie sfătuit și încurajat să rezolve exercițiul sau problema indiferent de forma în care acestea sunt prezentate.

Cartea este utilă nu numai pentru pregătirea bacalaureatului. Ea se constituie și într-un ghid metodic pentru profesori privind evaluările curente la clasă. Din acest punct de vedere, pe lângă programele școlare și programele de bacalaureat, cartea conține și un breviar teoretic."

Profesor univ. dr. Adrian Stoica

973-649-111-0

Scanned with OKEN Scanner